DIVULGAÇÃO MATEMÁTICA NA 14ª FEIRA DAS PROFISSÕES DA UEL: EXPERIÊNCIAS DO PET MATEMÁTICA

Jefther Gabriel Cardoso Domingues[1]

Valentina Dellagostin Artuzi[2]

Paulo Antonio Liboni Filho[3]

Resumo: Este trabalho apresenta um relato de experiência das atividades de extensão desenvolvidas pelo Programa de Educação Tutorial em Matemática (PET-Mat) durante a 14ª edição da Feira das Profissões da Universidade Estadual de Londrina (UEL), evento que tem como objetivo divulgar os cursos de graduação e integrar os estudandes da Educação Básica ao ambiente universitário. O grupo PET Matemática UEL atua no estande da Matemática, onde expõe conceitos de forma interativa, visando desmistificar a área e despertar o interesse do público pelos cursos de licencitura e bacharelado em Matemática da UEL. As principais atrações, e presentes neste trabalho, incluem o problema das Sete Pontes de Königsberg abordado através de um tapete transitável, o paradoxo do Hotel de Hilbert recriado numa maquetel móvel, o quebra-cabeça da Torre de Hanói utilizado para introduzir indução matemática, e o Problema de Monty Hall simulado para esclarecer conceitos de probabilidade. A metodologia focada na interação direta e na proposição de desafios mentais para resolução de problemas tem se mostrado um sucesso no engajamento de visitantes e tem feito o papel de disseminar o conhecimento matemático.

Palavras-chave: Feira de Profissões; Educação Matemática; Extensão Universitária; Jogos Matemáticos; PET Matemática.

INTRODUÇÃO

A Feira das Profissões da UEL é um evento aberto ao público e gratuito realizado anualmente no campus da Universidade Estadual de Londrina, no qual estudantes do Ensino Médio e a comunidade externa em geral são convidados a visitar a Universidade durante um dia, onde caminham por várias unidades de visitação em cada centro acadêmico e entram em contato com estandes individuais de cada curso de graduação.

Os principais objetivos da Feira das Profissões são a divulgação dos cursos de graduação da UEL, buscando orientar estudantes do Ensino Médio quanto à escolha da graduação que pretendem cursar; disseminar as possibilidades de acesso ao Ensino Su-

[1]Universidade Estadual de Londrina (UEL); PET Matemática; jefther.gabriel@uel.br
[2]Universidade Estadual de Londrina (UEL); PET Matemática; valentina.artuzi@uel.br
[3]Universidade Estadual de Londrina (UEL); tutor do PET Matemática; liboni@uel.br

perior na UEL; proporcionar aos estudandes da Educação Básica uma visão abrangente do funcionamento da Universidade, concedendo uma primeira integração aos espaços acadêmicos e administrativos.

O estande da Matemática, em particular, objetiva apresentar os cursos licenciatura e bacharelado em Matemática da UEL, dialogando sobre perspectivas de atuação profissional em cada área.

O Programa de Educação Tutorial em Matemática da UEL participa anualmente da Feira das Profissões durante todos os períodos do dia de realização do evento, onde os membros do grupo atuam como expositores, apresentando várias atividades idealizadas pelo próprio PET. O presente relato descreve as dinâmicas expostas pelo grupo na Feira de 2026, analisando o contexto e problemática de cada uma, bem como discutindo a recepção e interação do público com elas.

METODOLOGIA E ATIVIDADES EXPOSTAS

A seguir, são apresentados algumas das principais atividades desenvolvidas e expostas pelo grupo PET Matemática.

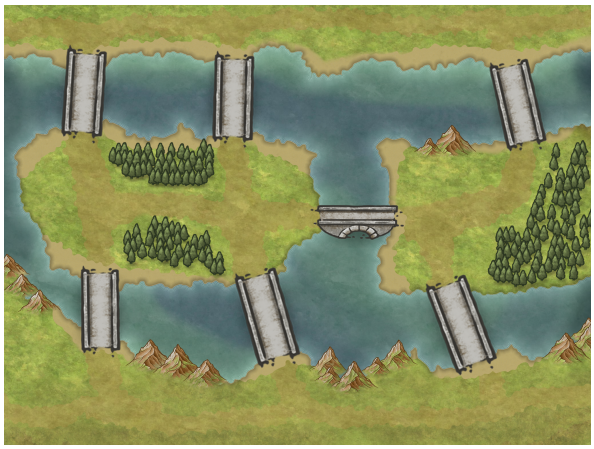
PONTES DE KÖNIGSBERG

O problema ds Sete Pontes de Königsberg é um famoso desafio histórico originado da disposição de sete pontes na atiga cidade de Königsberg na Prússia (agora Kaliningrado na Rússia). Este enigma foi formalizado e resolvido pelo matemático Leonhard Euler, em 1736, que definiu as bases do que futuramente viria a ser o ramo da matemática da Teoria dos Grafos (LOPES, 2022).

A cidade de Königsberg possuía quatro ilhas, conectadas por sete pontes. O problema consistia em encontrar um caminho que permita percorrer todas as pontes, passando uma única vez em cada uma e iniciando o percurso em quaisquer das porções de terra ou ilhas.

A disposição das pontes é mostrada na figura a seguir (essa representação visual é simplificada em proporções de tamanho e distância em relação ao caso da vida real, mas equivalente qualitativamente).

Figura 1 – Figura vetorizada produzida pelo grupo que ilustra as Pontes de Königsberg



Fonte: os próprios autores.

Euler provou que este problema não possui solução, reformulando-o em conceitos abstratos. Cada porção de terra foi chamada de vértice e era conectado à outro por meio de arestas, que por sua vez, representavam as pontes.

O problema então passa a ser enunciado como "começando de qualquer vértice, é possível percorrer cada aresta uma e uma única vez?".

De forma simplificada, podemos observar que, exceto pelos vértices iniciais e finais, os outros vértices devem ser visitados um número par de vezes. Pensando nas pontes, ao adentrar, por uma ponte específica, uma porção de terra ainda não visitada é necessário sair dela por outra ponte, caso não haja um par para esta ponte, o visitante se encontra preso nesta ilha.

Assim, é permitido no máximo dois vértices com um número ímpar de arestas, que seriam os pontos inicial e final do percurso (FERREIRA e BORGES, 2015). O caso particular do problema de Königsberg já possuía inicialmente 4 vértices com número ímpar de arestas, provando que este é um problema sem solução.

O PET Matemática confeccionou um tapete de tamanho 3x3 metros, utilizando recursos do custeio, que ilustra o problema das Sete Pontes de Königsberg, e utilizou esse material para apresentar o problema aos estudantes que visitaram o campus durante a Feira de Profissões, assim como também em outros eventos de extensão acadêmica.

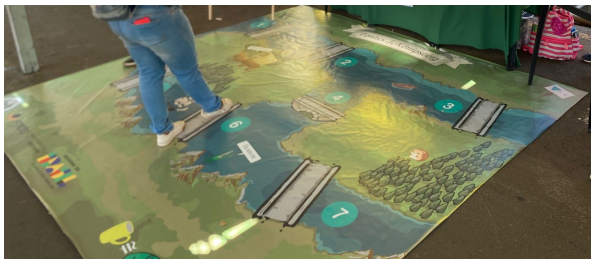
Os visitantes que se aproximavam e observavam o material eram convidados a participar do desafio e, após a explicação das regras, foram incentivados a tentar resolver o problema das pontes por conta própria, analisando e percorrendo o caminho sobre o

tapete. O tamanho do material chama a atenção e permite que grandes grupos participem do desafio ao mesmo tempo.

Os estudantes eram convidados a compartilhar suas ideias e tentativas e, após algumas tentativas falhas, eram induzidos pelo apresentador aos mesmos questionamentos feitos por Euler ao resolver o problema. Dessa forma, buscou-se desenvolver o raciocínio lógico e a resolução de problemas, além de quebrar a pré-suposição que a maioria dos participantes têm de que o problema, por ser apresentado como um desafio, com certeza possui uma solução.

Devido ao seu tamanho considerável, o tapete atraiu muitos estudantes que buscavam entender a atração. Além disso, ao ser proposta como um desafio, a atividade se torna mais interessante aos jovens, que ficam mais motivados a buscar uma solução. O PET Matemática estreou essa atração no ano de 2026, e avaliou que essa foi uma das atividades mais visitadas do estande da matemática na 14ª Feira das Profissões.

Figura 2 – O tapete do desafio das Pontes de Königsberg



Fonte: os próprios autores.

HOTEL DE HILBERT

O paradoxo do Hotel de Hilbert é um dos mais famosos experimentos mentais matemáticos, que ilustra os conjuntos infinitos na matemática. Considera-se um hotel hipotético com infinitos quartos numerados, todos ocupados no momento inicial do experimento.

No primeiro cenário, há um novo hóspede, que precisa ser hospedado em um quarto vago mesmo que todos estejam ocupados. Este problema pode ser resolvido ao realocar cada hóspede para o quarto ao lado, ou seja, no sucessor do número de seu quarto atual. Dessa forma, a pessoa hospedada no quarto 1 se muda para o quarto 2, a do quarto 2, por sua vez, se muda para o quarto 3, isto é, o hóspede em um quarto n arbitário será acomodada no quarto $n+1$. Este cenário é ilustrativo do caso geral onde há

um número finito de novos hóspedes, onde a pessoa do quarto n se realoca para o quarto $n + k$, fazendo com que k quartos sejam desocupados para que novos hóspedes possam ser acomodados (JORGE; VÀZQUEZ, 2021).

No segundo cenário, ao invés de apenas um hóspede, há um ônibus com infinitos passageiros, que precisam ser alocados em quartos vagos individuais. Um dos métodos possíveis é realocar os hóspedes já presentes no hotel para os quartos de número igual ao dobro do número de seu quarto atual. Assim, o hóspede do quarto 1 vai para o quarto 2, o do quarto 2, vai para o quarto 4, isto é, o hóspede do quarto n se acomoda no quarto $2n$. Desta forma, os quartos numerados da forma $2n - 1$ com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, os de número ímpar ficam vagos e podem ser destinados aos passageiros do ônibus, sendo endereçados para estes quartos baseados no número de seu assento ou da ordem em que descerem do ônibus, por exemplo.

No terceiro cenário, há agora infinitos ônibus com infinitos passageiros para serem acomodados. Um dos métodos para solucinar este problema é realocar os hóspedes em potências de números primos. Os hóspedes já presentes no hotel são alocados para as potência de 2, assim, o hóspede do quarto 1 se acomoda no quarto $2 = 2^1$, o do quarto 2 se acomoda no quarto $4 = 2^2$, ou seja, o hóspede do hotel que ocupava o quarto n se realoca para o quarto 2^n; Os passageiros do primeiro ônibus serão alocados nas potências do próximo número primo, que é o 3, assim, eles ocupam os quartos $3^1, 3^2, \ldots, 3^n, \ldots$. Deste modo, basta endereçar os passageiros do p-ésimo ônibus para potências de um número primo p ainda não utilizado, p^n onde n indica alguma forma de ordenar os passageiros de cada ônibus.

O Teorema de Euclides garante a existência de infinitos números primos, e o Teorema Fundamental da Aritmética[4] garante a decomposição única dos números naturais em potências de números primos, em particular, se p, q são primos, $p^m \neq p^n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Então fica evidente que dois hóspedes jamais serão enderaçados para um mesmo quarto.

O PET Matemática possui uma maquete do Hotel de Hilbert, com alguns quartos iniciais numerados e o símbolo de reticências ($\cdots$) para indicar o número infinito de quartos, com uma alça que permite pendurar o modelo no pescoço, facilitando o manuseio. Há também um número finito de hóspedes, representados por tampinhas de plástico e uma

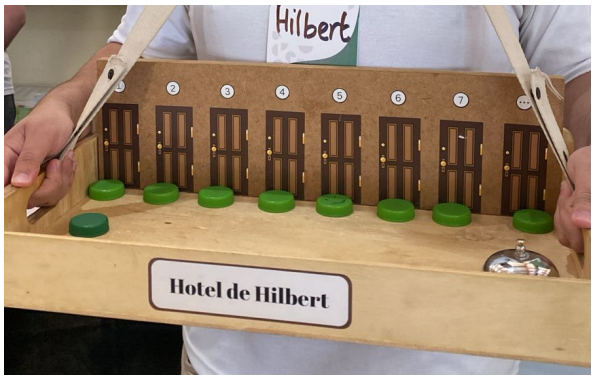
[4]HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

campainha para gerar maior imersão e atrair maior público.

O petiano responsável pelo Hotel de Hilbert pode apresentava-se como o gerente do hotel, e/ou o prório Hilbert, aproximando-se dos visitantes e contextualizando a história aos ouvintes, descrevendo-o como um hotel muito especial devido à sua propriedade der ser infinito. Os participantes eram, então, convidados a pensar e compartilhar ideias sobre como resolver o primeiro cenário. Caso apresentassem dificuldades, eram oferecidas sugestões de como precisa-se liberar um quarto vago, mas que a hipótese do hotel ser infinito é indispensável, e quando necessário, eram guiados até a resposta. E assim, quando o visitante compreendia certo cenário, era convidado a ouvir o próximo e novamente pensar numa solução para este. O apresentador tinha a tarefa de explicar os cenários e suas soluções, e também responder o por quê de certas soluções postas pelos visitantes não serem válidas, e se forem, reafirma-las.

O Hotel de Hilbert é uma das atrações recorrentes no estande da Matemática da Feira das Profissões, assim como também em outros eventos de extensão universitária ao longo do ano. Na feira de 2026, foi avaliada como uma ótima atração pelo grupo em vista do grande número de pessoas que se interessaram e interagiram com a atração. A campainha presente na maquete é um ótimo atrator para os alunos, que por vezes se aproximam apenas pelo barulho do sino, mas acabam se interessando pelo problema. Por ser uma atividade interativa que convida os participantes a refletirem e buscarem respostas de forma independente, o desafio contribui para o exercício do pensamento lógico, bem como para o melhor entendimento do conceito de "infinito".

Figura 3 – Maquete do Hotel de Hilbert



Fonte: os próprios autores.

TORRE DE HANÓI

A Torre de Hanói é um quebra cabeça matemático que consiste em três torres fixadas numa base, com vários discos de tamanhos diferentes que podem ser empilhados sobre os outros em cada torre.

O objetivo é transferir todos os discos que estão inicialmente empilhados em uma torre para outra, obedecendo certas regras:

1. Apenas um disco pode ser movido por vez;
2. Apenas discos na posição superior de uma das torres podem ser movidos;
3. Um disco só pode ser colocado sobre a base ou um disco de tamanho maior.

Uma questão complementar levantada é "qual o menor número de movimentos possível para mover a torre que possui n discos?". Essa questão pode ser resolvida utilizando indução matemática, o que torna o quebra-cabeça em uma importante ferramenta para introduzir este conceito para o público geral.

Considere o caso trivial com apenas 1 disco e o problema de transferir essa peça da torre da esquerda para a direita. Basta 1 movimento: mover tal peça para a direita.

Para o caso com 2 discos, nota-se que para mover o disco inferior para a direita, será necessário mover o disco superior para a torre do meio. Como sabemos que transferir apenas 1 disco de torre precisa de 1 movimento, o realizamos e contabilizamos 1 na contagem, movemos o disco maior para a direita, adicionando 1 na contagem de movimentos, e finalizamos movendo novamente o disco menor acima do menor na direita, totalizando 3 movimentos. Em suma, para mover a pirâmide de tamanho 2, precisamos de 3 movimentos.

Exemplificando o caso com 3 discos, usando o caso anterior, movemos a pirâmide de tamanho 2 superior para o meio, contabilizando 3 movimentos. Movemos o disco maior para a direita, aumentando 1 movimento. E finalmente, movemos novamente a pirâmide de tamanho 2 superior acima desta peça na direita, contabilizando novamente 3 movimentos. O total de movimentos será 7.

Fica notável que o número de movimentos mínimo para n depende do número de movimentos para mover a pirâmide acima dela que precisa de $n-1$ movimentos. Afir-

mamos que o número mínimo de movimentos para n peças será $2^n - 1$ (SILVA, 2022). Provemos por indução matemática.

O caso para $n = 1$ foi trivialmente resolvido como exemplo. Supondo que vale para k, provemos que vale para $k + 1$.

Antes de movermos o maior disco, precisamos deixá-lo livre sem peças acima, movendo a pirâmide de tamanho k acima dele para a torre do meio. Por hipótese, esse processo tem número mínimo de movimentos de $2^k - 1$. Em seguida, movemos a maior peça para a direita, gerando um novo movimento. Por último, movemos agora a pirâmide de tamanho k acima desse disco, novamento usando $2^k - 1$ movimentos.

O número total de movimentos é

$$2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2^k + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Fica provado por indução que o número mínimo de movimentos para n peças é $2^n - 1$.

O PET Matemática apresentou a Torre de Hanói para os visitantes da 14º Feira de Profissões e, após explicar as regras, desafiou o público a resolver o desafio para o caso $n = 5$ por conta própria com o menor número de movimentos possível.

Após o desafio, o apresentador desenvolvia o questionamento: "qual é o menor número de movimentos para mover a torre". Em seguida, exemplificava os casos para uma, duas e três peças, anotando os resultados em um papel para facilitar a visualização dos participantes, fornecendo também o número de movimentos para os casos seguintes de quatro e cinco discos. Então, o apresentador mostrava a sequência $1, 3, 7, 15, 31$ e perguntava: "você consegue ver alguma relação entre os números dessa sequência?". Após cada palpite explicava-se a validade ou não da tentativa e, por fim,concluía-se que o número de movimentos necessários é dado pela expressão $2^n - 1$.

Em anos anteriores, o grupo buscava explicar o processo de indução matemática utilizado para provar essa afirmação. Porém, verificou-se que poucos indivíduos se interessavam por tal fato e a explicação frequentemente afastava participantes das demais atrações. Assim, na Feira das Profissões de 2026 o PET Matemática optou por utilizar a Torre de Hanoi para evidenciar o que é feito em um curso de bacharelado em Matemática. Quando o apresentador revelava a resposta, ele questionava novamente os observados,

induzindo-os a pensar: "o que me garante que essa equação vale quando tenho 100 peças? Ou 1000 peças? É evidente que não é possível testar tais cenários manualmente e, então, é possível introduzir o conceito de indução sem entrar em maiores detalhes, explicando apenas que existe um método para provar que essa fórmula é válida para qualquer número de discos.

Caso o participante se interesse, o apresentador explicava o processo de maneira mais formal. Caso contrário, o membro do grupo reponsável pela atividade apenas indicava que esse quebra-cabeça representa, de maneira simplificada, um pouco do que se faz em um curso de Matemática: pega-se um fenômeno observável, traduzindo este para termos formalizados matemáticos para realizar manipulações e obter conclusões sobre o fênomeno observado.

O grupo analisou que com a mudança na forma de apresentação, a atividade atraiu um número maior de participantes, os quais, em sua maioria, se interessavam pelas demais atrações, em consequência da curiosidade levantada pelo problema da Torre de Hanói.

Figura 4 – Torre de Hanói



Fonte: os próprios autores.

Problema de Monty Hall

O problema de Monty Hall é um desafio mental de probabilidade muito conhecido, inspirado no game show americano *Let's Make a Deal* e batizado em homenagem a seu apresentador.

Considere a seguinte situação: você está em um programa de TV, e lhe é dada a opção de escolher inicialmente uma de três portas, dentro de uma delas está um prêmio desejado, como um carro, e dentro das outras duas há um prêmio considerado menos

valioso, por exemplo, cabras. Após escolher uma porta, o apresentador abrirá uma das duas outras portas que sobraram, e nesta não há um prêmio, há uma cabra. Agora lhe é dado uma nova escolha, trocar de porta para a restante que não foi aberta ou manter a sua escolha inicial. Qual opção é mais vantajosa?

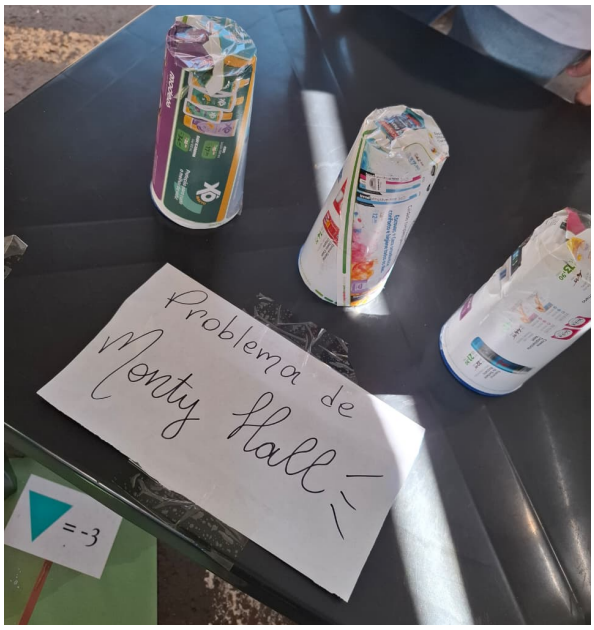
Apesar de inicialmente ter-se a percepção de que as portas possuem a mesma probabilidade de terem o prêmio, de 50%, isso não é verdade. A porta não escolhida inicialmente possui 2/3 de probabilidade de ter o prêmio, mais do que a porta escolhida, com apenas 1/3 de chance (FLORÊNCIO et. al., 2014).

Há muitas explicações refinadas de por quê o problema de Monty Hall apresenta tal resposta contraintuitiva. Objetivando explicações simples para o público geral, pode-se dizer que inicialmente todas as portas possuem a mesma probabilidade de ter o prêmio, 1/3. Assim, sua porta escolhida, tem 1/3 de chances de ter o prêmio. Em contrapartida, as outras duas possuem juntas 2/3 de chance de conterem o prêmio. Após o apresentador abrir uma delas, toda a probabilidade que possuíam combinadas é transferida para a porta restante, que tem então 2/3 de chance guardar o carro.

O PET Matemática trouxe para a Feira das Profissões de 2026 o Problema de Monty Hall usando copos de plástico para representar as portas e algum pequeno objeto para representar o prêmio. No estande da matemática, foi apresentado o mesmo desafio mental do programa: "é melhor trocar de porta ou manter a escolha inicial?". No final, era explicado o motivo pelo qual mudar de porta é sempre a melhor estratégia para o problema e os visitantes tiveram a chance de tentar múltiplas vezes para verem o resultado teórico em prática.

O PET Matemática considerou essa mais uma das atrações de sucesso e pretende melhorar os materiais desse problema, produzindo algum tipo de maquete que simule o problema em seu formato original de game show, visando atrair visualmente mais visitantes.

Figura 5 – Materiais do Problema de Monty Hall



Fonte: os próprios autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A participação do PET Matemática na 14ª Feiras das Profissões da UEL mostrou-se uma ação de extensão de grande êxito. O objetivo principal de demistificar a Matemática e apresentá-la de modo lúdico e compreensível foi atingido, fato este evidendiciado pela intensa participação e interação dos estudantes da educação básica durane as apresentações no estande.

A experiência mostra que o uso de materiais atrativos atua como um incentivo para o engajamento do público. Observou-se que os alunos não apenas interagiam com os objetos, mas se propuseram à resolução de problemas e formulação de hipóteses a serem examinadas. O tapete das Pontes de Königsberg e a maquete do Hotel de Hilbert permitiram que grandes grupos de visitantes debatessem soluções em conjunto, enquanto o quebra-cabeça da Torre de Hanói e o Problema de Monty Hall instigaram o pensamento crítico matemático.

Salienta-se que o PET Matemática exibiu outras atividades menores na Feira das Profissões, também muito importantes, como divulgação de seu livro 'Matemática: Um livro feito por alunos para alunos', focado na Matemática Básica, simulações computacionais e superfícies geométricas. Ainda assim, a atividade de maior importância realizada no

estande da Matemática foi o diálogo com os estudantes da Educação Básica, respondendo dúvidas e esclarecendo confusões sobre os cursos de Matemática da UEL.

Como desdobramento futuro, a avaliação qualitativa do grupo aponta para a permanência destas quatro atividades no catálogo de exposições do PET Matemática. Além disso, visando aprimorar a imersão e a atratividade visual, planeja-se a reformulação de alguns materiais, como a confecção de uma maquete estruturada para o Problema de Monty Hall, substituindo os copos plásticos por uma simulação melhor polida e fiel ao formato original do programa de auditório.

Conclui-se, portanto, que a atividade cumpriu seu papel essencial de divulgar as graduações em Matemática da UEL, proporcionando interações entre os petianos e a comunidade externa e reafirmando a importância da extensão universitária na divulgação do conhecimento científico.

REFERÊNCIAS

LOPES, F. J. A. Euler e as Pontes de Königsberg. **Revista Brasileira de História da Matemática**, vol. 15, nº30, p. 23-32, jul 2015.

FERREIRA, A.F.; BORGES, L.M. As Pontes de Königsberg. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, vol. 5, 2022.

JORGE, J.P.; VÀZQUEZ, H. Retornando al Hotel de Hilbert. **Revista de Educación Matemática**, vol. 36, nº 2, p. 67-87, 2021.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

SILVA, F.S. **Torre de Hanói no estudo de recorrência e indução finita para o Ensino Médio**. 74p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Centro de Tecnologia e Ciências :Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

FLORÊNCIO, P. H. B.; SANTOS NETO, A. S.; DANTAS, M. J. P. Análise do problema de Monty Hall: um enfoque bayesiano. **Simpósio Acadêmico de Engenharia de Produção**. Universidade Federal de Viçosa, 2014.