AÇÕES DE GRUPO E O TEOREMA DE BURNSIDE

Autora 1, Amanda Monte de Souza[1]

Autor 2, Fernando Colman Tura[2]

Autor 3, João Roberto Lazzarin[3]

Resumo: Este trabalho apresenta os fundamentos da teoria de ações de grupos sobre conjuntos, com ênfase no Teorema de Burnside. Inicialmente, define-se ação de grupo como uma aplicação $* : G \times X \to X$ satisfazendo $e * x = x$ e $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$. As ações são classificadas em fiéis e transitivas. São discutidos exemplos como a translação esquerda, o grupo diedral D_4 agindo sobre vértices de um quadrado e a ação por conjugação.

A partir de um G-conjunto X, definem-se a órbita de x e o subgrupo de isotropia. O Teorema da Órbita-Estabilizador estabelece que $|G * x| = [G : G_x]$, implicando que, para grupos finitos, o tamanho de cada órbita divide a ordem do grupo.

O resultado central é o **Teorema de Burnside**, que afirma que o número de órbitas de uma ação de um grupo finito G sobre um conjunto finito X é dado por

$$\#\text{órbitas} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|,$$

onde $\mathrm{Fix}(g)$ é o conjunto dos elementos de X fixados por g. Esse teorema constitui uma ferramenta fundamental em problemas de contagem com simetrias, como enumeração de colorações, evidenciando a conexão entre Álgebra Abstrata e Combinatória.

Palavras-chave: Ação de Grupo, Teorema de Burnside, Órbita, Estabilizador.

INTRODUÇÃO

A Teoria de Grupos é uma das áreas centrais da álgebra abstrata, com vastas aplicações em outras disciplinas da matemática, como geometria, combinatória e teoria dos números. Dentro desse contexto, o estudo de ações de grupos sobre conjuntos permite compreender como estruturas algébricas podem atuar como simetrias ou transformações sobre objetos. O presente trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais de ação de grupo, com ênfase nas noções de órbita, estabilizador e ações fiéis e transitivas, culminando no Teorema de Burnside (ou Lema de Burnside), uma ferramenta combinatória de grande relevância para contagem de órbitas.

[1]UFSM; Matemática Bacharelado; amandamsouza06@gmail.com
[2]UFSM; Departamento de Matemática; fernandotura@gmail.com
[3]UFSM; Departamento de Matemática; joao.lazzarin@ufsm.br

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DE AÇÃO DE GRUPO

Seja $(G, .)$ um grupo e X um conjunto. X é dito um $G - grupo$ se G realiza uma ação sobre ele, e é denotado por $(X, G, *)$. A ação $* : G \times X \to X$ associa cada par de $G \times X$ a um elemento de X. Ainda, este conjunto deve satisfazer duas condições, sendo elas:

1. O elemento neutro e de G não deve alterar o conjunto X, ou seja, $e * x = x, \forall\ x \in x$.
2. A ação sucessiva de dois elementos deve ser equivalente à ação do produto dos dois elementos no grupo, ou seja, $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$.

CLASSIFICAÇÃO DAS AÇÕES

As ações de grupo podem ser classificadas segundo dois critérios principais: Ação fiel, ocorre quando somente o elemento neutro fixa todos os elementos de X; ação transitiva, ocorre quando, para cada $x, y \in X$ fixados, existe $g \in G$ tal que $g * x = y$.

EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Translação à esquerda: G age sobre si mesmo por $g * x = gx$. Essa ação é tanto fiel quanto transitiva;

Grupo diedral D_4 agindo sobre o conjunto de vértices e lados de um quadrado: a ação é fiel, pois cada simetria produz uma permutação distinta, mas não é transitiva, uma vez que vértices e lados não são permutados entre si;

Para exemplificar caracterizando uma ação não fiel, tome G qualquer e X o centro de G, $X = \{x \in G : xg = xg,\ \forall\, g \in G\}$. Ação de G agindo sobre $Z(G)$ por conjugação é sempre trivial. Mesmo G não sendo abeliano temos $g * x = x$ para todo x no centro. No caso abeliano o centro será todo o G.

ÓRBITAS E SUBGRUPOS DE ISOTROPIA

Dado um G-conjunto X e um elemento $x \in X$, definem-se:

- **Órbita de** x:

$$G * x = \{g * x \mid g \in G\}.$$

As órbitas constituem uma partição de X, uma vez que a relação $x \sim y \iff \exists\ g \in$

$G : y = g * x$ é de equivalência.

- **Subgrupo de isotropia (ou estabilizador) de** x:

$$G_x = \{g \in G \mid g * x = x\}.$$

Um resultado fundamental é o **Teorema da Órbita-Estabilizador**, que estabelece:

$$|G * x| = [G : G_x].$$

Em particular, se G é finito, tem-se que as órbitas serão finitas, mesmo no caso de X ser infinito e ainda, pelo Teorema de Lagrange que a quantidade de elementos de $G * x$ é ordem de G dividido pela ordem do subgrupo G_x, então tem-se:

$$|G * x| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

O TEOREMA DE BURNSIDE

Caso G seja finito e X infinito, o número de órbitas necessariamente é infinito, pois as órbitas são classes de equivalência que são finitas e para cobrir o X todo, precisaremos de infinitas classes. Agora, para X finito, o **Teorema de Burnside** (ou Lema de Burnside) fornece uma fórmula para o número de órbitas de uma ação de um grupo finito G sobre X. Para cada $g \in G$, denote por $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X : g * x = x\}$. Então:

$$\#\text{órbitas} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Esse resultado é de extrema utilidade em problemas de contagem com simetrias, como enumeração de colorações de objetos sob ação de grupos de permutação, e constitui uma ponte elegante entre a álgebra e a combinatória.

UMA APLICAÇÃO

Imagine que você quer contar quantas maneiras diferentes existem de colorir os vértices de um quadrado com duas cores, mas considerando que rotações e reflexões não

devem gerar colorações “novas” (ou seja, duas colorações que só diferem por uma simetria do quadrado contam como a mesma).

- **Defina o grupo de simetrias:** aqui, $G = D_4$, o grupo diedral de ordem 8.
- **Defina o conjunto X:** todas as colorações possíveis dos vértices. Se há 2 cores e 4 vértices, então $|X| = 2^4 = 16$.
- **Ação do grupo:** cada simetria de D_4 permuta os vértices, e portanto transforma uma coloração em outra.
- **Fix(g):** para cada simetria g, contamos quantas colorações permanecem invariantes sob g.

Exemplo: sob a rotação de $90°$, só as colorações em que todos os vértices têm a mesma cor permanecem fixas (2 colorações). Sob a identidade, todas as 16 colorações são fixas. E assim por diante para cada elemento do grupo.

$$\#\{\text{colorações distintas}\} \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\text{Fix}(g)|$$

Neste caso,

$$|G| = 8$$

$$\sum_{g\in G}|\text{Fix}(g)| = 48$$

E portanto

$$\#\{\text{colorações distintas}\} \;= 6$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das ações de grupo revela a riqueza da interação entre estruturas algébricas e conjuntos arbitrários. As noções de órbita e estabilizador, aliadas ao Teorema de Burnside, não apenas aprofundam a compreensão teórica da Teoria de Grupos, mas também oferecem ferramentas práticas para a resolução de problemas em diversas áreas da matemática. A presente exposição buscou sistematizar esses conceitos, partindo dos fundamentos até uma aplicação clássica. O Lema de Burnside transforma um problema

de contagem “com simetrias” em um problema algébrico: basta somar os pontos fixos de cada elemento do grupo e dividir pelo tamanho do grupo. É por isso que ele é considerado uma ponte elegante entre álgebra e combinatória.

REFERÊNCIAS

MELO, A. P. B. de. **Ações de Grupo sobre Conjuntos e o Teorema de Burnside**. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2020.

ANDRETTI, C. M. V. **Ações de Grupos e Contagem**: Teorema de Burnside. 2011. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.