O PRIMEIRO TEOREMA DE MORSE

Kiotheka, Felipe Monteiro[1]

Resumo: A Teoria de Morse se preocupa em estudar as funções de Morse. Essas funções são as melhores candidatas para extrair informações intrínsecas da geometria de uma variedade. O Lema de Morse nos da uma forma bem conhecida do espaço próximo dos pontos críticos enquanto o Primeiro Teorema de Morse mostra que longe dos pontos críticos a variedade assume uma forma simples. Vamos demonstra-lo usando o fluxo de campos, em específico, de campos *gradient-like*, que nos da uma forma elegante de obter difeomorfismos.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Teoria de Morse; Variedade Suave.

INTRODUÇÃO

Esse trabalho mostra o resultado parcial no estudo do livro de Tavares (1979), com as ferramentas de Lee (2012) e Milnor (1979). O objetivo central da pesquisa é alcançar o teorema de classificação de superfícies compactas e conexas em $\mathbb{R}^n$. A teoria de Morse será a ferramenta usada e, como resultado parcial, vamos apresentar um argumento conhecido como campos de vetores *gradient-like* e demonstrar o Primeiro Teorema de Morse.

VARIEDADES SUAVES

Uma variedade M é uma variedade suave, no sentido de Lee (2012, p. 13). Também vamos herdar as definições de mapa suave, espaço tangente, fibrado tangente e de diferencial de um mapa suave; e, claro, a notações do mesmo autor.

A teoria em seu propósito de classificações é construída sobre variedades imersas em $\mathbb{R}^n$ mas os resultados aqui enunciados não precisam dessa condição. Como resquício, chamamos de parametrização o inverso de uma carta.

CAMPO DE VETORES SUAVES

Umas das conveniências de se trabalhar com variedades é que o fibrado tangente TM também é uma variedade (Lee, 2012, p.66). E, com ela, podemos discutir sobre a

[1]Universidade Federal do Paraná (UFPR); Graduando em bacharelado em Matemática; felipe.kiotheka@ufpr.br.

suavidade de mapas chegando no fibrado.

Definição 1.1. Dada uma variedade M e a projeção $\pi : TM \to M$, um *campo de vetores tangente a* M é um mapa suave $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = id_M$ ou, em outras palavras, é uma seção de π.

Apesar de ter muita teoria e até uma forma mais algébrica de ver os campos de vetores, vamos nos atentar apenas na existência do fluxo. Esse, por sua vez, será essencial para o argumento da demonstração do Primeiro Teorema de Morse.

Teorema 1.2. Dada uma variedade M e um campo de vetores suave $V : M \to TM$, se o suporte de V é compacto então existe o fluxo global $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ de V.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Lee (2012, p. 216).

RUDIMENTO DA TEORIA DE MORSE

O objeto de estudo dessa teoria são as funções suaves definidas na variedade com valores reais. Para esse caso particular, considere as seguintes definições.

Definição 2.1. Dada uma variedade riemmaniana M e uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$, definimos o *gradiente de* f, $\operatorname{grad} f : M \to TM$, em p pelo único vetor em T_pM tal que

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle_p = df_p(v), \text{ para todo } v \in T_pM.$$

Sabemos da álgebra linear que num espaço vetorial com produto interno, para todo funcional linear, existe um único vetor que o descreve em termos do produto interno. É exatamente isso que estamos usando aqui. O interessante é que essa construção é, de alguma forma, suave, isto é, se tomarmos funcionais lineares próximos então esse vetor varia suavemente (Lee, 2012, p. 343).

Definição 2.2. Dada uma variedade M, uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ e $p \in M$, dizemos que p é um *ponto crítico de* f se $df_p = 0$ e, caso contrário, chamamos p de *ponto regular de* f. Ainda, se p é um ponto crítico de f e $\det(\operatorname{Hess} f(p)) \neq 0$ então chamamos p de *ponto não-degenerado*.

Definição 2.3. Dada uma variedade M, uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in M$,

dizemos que uma parametrização (U, φ) em torno de p é uma *parametrização de Morse* se

$$f \circ \varphi(x) = (x_1)^2 + \cdots + (x_k)^2 - (x_{k+1})^2 - \cdots - (x_n)^2.$$

Teorema 2.4 (Lema de Morse). Dada uma variedade M, uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ e $p \in M$, então f admite uma parametrização de Morse em torno de p se, e somente se, p é um ponto crítico não-degenerado de f.

Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada em Tavares (1979, p. 65) para o caso de dimensão 2 e em Milnor (1963, p. 7) para o caso geral. O teorema diz que do ponto de vista da função, a variedade tem formato bem definido e conhecido. E essa é uma das observações importantíssimas para a classificação.

Definição 2.5. Dada uma variedade M e uma função $f : M \to \mathbb{R}$, dizemos que f é uma *função de Morse* se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

Então, uma função de Morse admite, em cada um de seus pontos críticos, a forma dada pelo Lema de Morse. Sabemos como a variedade se comporta próximo desses pontos, o que nos resta perguntar é o que acontece entre eles.

PRIMEIRO TEOREMA DE MORSE

Teorema 2.6 (Primeiro Teorema de Morse). Dada uma variedade riemmaniana compacta M e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de Morse, se $f^{-1}([a, b])$ só contém pontos regulares, então obtemos os seguintes difeomorfismos

$$f^{-1}(\{a\}) \cong f^{-1}(\{b\}) \text{ e } f^{-1}([a, b]) \cong f^{-1}(\{a\}) \times [a, b].$$

Demonstração: Sejam $K = f^{-1}([a, b])$, $K_a = f^{-1}(\{a\})$ e $K_b = f^{-1}(\{b\})$. Inicialmente, suponha que K é conexo, então seja $U \subset M$ uma vizinhança aberta de K que não contém pontos críticos. Essa vizinhança existe pois os pontos críticos são isolados. E, pela partição da unidade (Lee, 2012, p. 43), existe $\alpha : M \to \mathbb{R}$ suave tal que

$$0 \leq \alpha \leq 1,\ \alpha(p) = 1 \iff p \in K \text{ e } \alpha(p) = 0 \iff p \in M - U.$$

Com isso, considere o campo $V : M \to TM$ dado por

$$V_p = \begin{cases} \alpha(p)\dfrac{\operatorname{grad} f(p)}{||\operatorname{grad} f(p)||^2}, & \text{se } p \in U \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, esse é um campo suave e bem definido, pois $\operatorname{grad} f(p)$ não se anula com $p \in U$. E, como $\operatorname{supp} \operatorname{grad} f$ é fechado e, logo, compacto, existe o fluxo $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ de V.

Para $p \in M$ fixado, considere $\xi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $\xi_p(t) = f(\theta_t(p))$. Essa função está avaliando f na curva integral determinada por p. E, note que, se $\theta_t(p) \in U$,

$$\begin{aligned} \xi_p'(t) &= df_{\theta_t(p)}\left(\frac{d}{dt}\theta_t(p)\right) = df_{\theta_t(p)}\left(V_{\theta_t(p)}\right) = \left\langle \operatorname{grad} f(\theta_t(p)), V_{\theta_t(p)} \right\rangle \\ &= \left\langle \operatorname{grad} f(\theta_t(p)), \alpha(\theta_t(p))\frac{\operatorname{grad} f(\theta_t(p))}{||\operatorname{grad} f(\theta_t(p))||^2} \right\rangle = \alpha(\theta_t(p)). \end{aligned}$$

Portanto, se $\theta_t(p) \in K$, então $\xi_p'(t) = \alpha(\theta_t(p)) = 1$. Assim, $\xi_p(t) = t + K(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $\theta_t(p) \in K$.

Fixando $p \in K_a$, temos que $\theta_0(p) = p \in K$ e $\xi(0) = f(\theta_0(p)) = a$. Daí, $\xi(t) = t + a$ desde que $\theta_t(p) \in K$. O difeomorfismo $\theta_{b-a} : M \to M$ é tal que $f(\theta_{b-a}(p)) = b$ e, então, K_a é mapeado em K_b. E concluímos que $\theta_{b-a} : K_a \to K_b$ é o difeomorfismo que queríamos.

Para o último difeomorfismo, considere $\psi : K_a \times [a, b] \to K$ dado por $\psi(p, t) = \theta_{t-a}(p)$. Então ψ está bem definida e é suave. Notando que $p \mapsto (\theta_{a-f(p)}(p), f(p))$ é suave e satisfaz

$$\begin{aligned} \psi(\theta_{a-f(p)}(p), f(p)) &= \theta_{f(p)-a}(\theta_{a-f(p)}(p)) \\ &= \theta_0(p) = p; \\ (\theta_{a-f(\psi(p,t))}(\psi(p,t)), f(\psi(p,t))) &= (\theta_{a-f(\theta_{t-a}(p))}(\theta_{t-a}(p)), f(\theta_{t-a}(p))) \\ &= (\theta_0(p), t) = (p, t), \end{aligned}$$

pois $f(\theta_{t-a}(p)) = \xi(t - a) = t$, temos que é a inversa de ψ e, portanto, ψ é um difeomorfismo e $K \cong K_a \times [a, b]$.

No caso em que K não é conexo, obtemos os difeomorfismos em cada uma das partes conexas e definimos um globalmente em K. ■

Com isso, temos um panôrama de como vão se suceder os próximos passos. Podemos garantir a existência dessas funções e, mais ainda, provamos que elas são densas no espaço das funções $M \to \mathbb{R}$ (Tavares, 1979, p. 107). E, assim, estudamos separadamente o que acontece nos pontos críticos e entre eles.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse teorema é um recorte do trabalho principal em que o objetivo é classificar superfícies regulares e consequentemente obter a Característica de Euler delas. Lá, nós usamos as funções de Morse, que são funções bem comportadas para aplicações iterativas dos teoremas de Morse. Com isso e as definições de geometria algébrica, podemos obter informações intrínsicas da classe, por difeomorfismos, de uma superfície.

Os próximos passos são concluir os estudos dos teoremas de Morse e demonstrar o teorema de classificação usando essa ferramental. E, então, estudar outra aplicação da teoria demonstrando o Teorema de Gauss-Bonnet segundo o livro de Montiel (1958).

REFERÊNCIAS

LEE, John. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. Nova Iorque: Springer New York, 2012.

MILNOR, John. **Morse Theory**. Princeton: Princeton University Press, 1963.

MONTIEL, Sebastián. **Curves and Surfaces**. 2. ed. Madrid: American Mathematical Society, 1958.

TAVARES, George. **Funções de Morse e Classificação de Superfícies**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.