Uma Formulação Algébrica Exata para a Cinemática Inversa de Braços Robóticos

Oliveira, Enrique Barbosa[1]
Sánchez, Luis Florial Espinoza[2]

Resumo: Este trabalho trata do problema da cinemática inversa de um braço robótico, que consiste em determinar os ângulos das juntas a partir da posição desejada do efetuador final. Por ser um problema não linear, sua solução é tradicionalmente obtida por métodos numéricos. Como principal contribuição, apresentamos uma solução algébrica exata baseada na Projeção Estereográfica. Essa abordagem elimina a necessidade de aproximações iterativas, resultando em maior eficiência e precisão na simulação computacional.

Palavras-chave: Braço Robótico; Cinemática Inversa; Projeção Estereográfica.

INTRODUÇÃO

A robótica tem se consolidado como um dos campos mais dinâmicos da ciência e da tecnologia, impulsionando avanços significativos na automação, na inteligência artificial e na simulação computacional. A configuração espacial de um robô é descrita matematicamente por meio de ferramentas da álgebra linear, da geometria computacional e do cálculo diferencial. Para o desenvolvimento detalhado, ver [1, 3].

O foco deste trabalho está no estudo de braços robóticos planares, especificamente nas equações que modelam as cinemáticas direta e inversa. A cinemática direta determina a posição do efetuador final a partir dos ângulos das juntas do braço. Sua descrição matemática é direta. Por outro lado, a cinemática inversa realiza o processo oposto: dada a posição de um ponto, deseja-se verificar se o efetuador pode alcançá-lo e, em caso afirmativo, determinar os ângulos das juntas. A determinação precisa desses ângulos constitui um dos principais desafios no estudo de braços robóticos. Esse problema é fundamental em diversas aplicações, que vão desde a robótica industrial até animações em jogos digitais e em filmes, como podemos encontrar em [4, 2].

[1]Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia (IME UFU); Bacharelado em Matemática; enriboliveira@gmail.com
[2]Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia (IME UFU); luis.sanchez@ufu.br

Para abordar o problema da cinemática inversa, utilizamos a projeção estereográfica. Essa aplicação transforma pontos de um círculo em pontos de uma reta. A projeção estereográfica converte o problema da cinemática inversa de um braço robótico de dois elos em um sistema de equações quadráticas. Essa abordagem também permite obter uma solução algébrica para o caso de um braço com três elos.

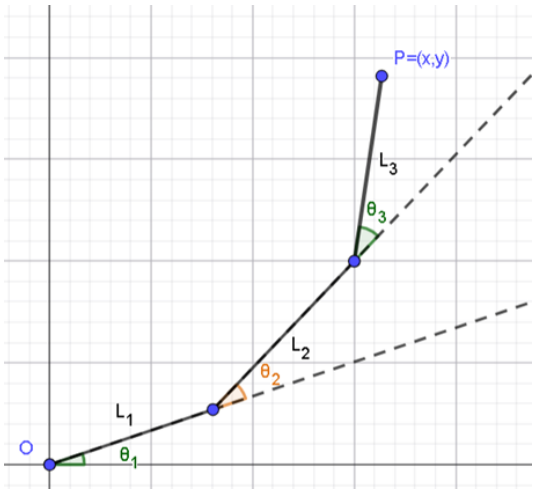
Embora existam métodos numéricos para resolver a cinemática inversa de um braço de 3 elos, destaca-se neste trabalho a solução algébrica proposta, pois ela fornece uma solução exata. Consequentemente, a simulação torna-se mais eficiente e viável para aplicações em tempo real.

CINEMÁTICA DIRETA

A cinemática direta relaciona os parâmetros articulares à posição e orientação do efetuador final, ver [3, 6]. Para modelar o problema, adotaremos o referencial relativo, que significa considerar que o ângulo de rotação de cada segmento do braço é medido em relação ao segmento anterior. Cada braço usa o braço anterior como eixo de referência para a medição do próximo ângulo. Veja a Figura 1. Se $P(x, y)$ é o efetuador final em um sistema com três braços, as equações são dadas por:

$$\begin{cases} x = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ y = L_1 sen(\theta_1) + L_2 sen(\theta_1 + \theta_2) + L_3 sen(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \end{cases} \tag{1}$$

Figura 1 – Braço com 3 links



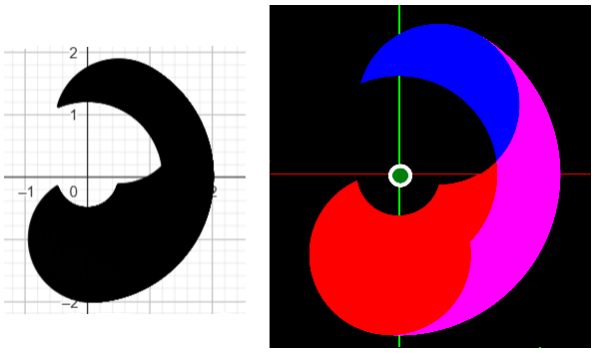
Fonte: os próprios autores.

onde L_1, L_2 e L_3 são os comprimentos dos elos; θ_1, θ_2 e θ_3 são os ângulos das juntas em relação a um referencial relativo.

Em geral, sem restrições angulares, existirão infinitas configurações $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ que alcançam P. Se incluirmos restrições aos ângulos: $-\omega_1 \leq \theta_1 \leq \omega_1$, $-\omega_2 \leq \theta_2 \leq \omega_2$ e $-\omega_3 \leq \theta_3 \leq \omega_3$, um ponto P qualquer pode também ser alcançado uma única vez ou nenhuma.

Com o objetivo de ilustrar as regiões de alcance de um braço robótico de dois elos sob diferentes restrições angulares, consideremos $L_1 = 1, L_2 = 1$ e $-1.675 \leq \theta_1 \leq 1.05208; -2.62146 \leq \theta_2 \leq 1.82779$, ver Figura: 2. Essas imagens também servem como referência para a interpretação das regiões obtidas posteriormente, quando não são impostas restrições aos ângulos articulares, uma vez que a ausência dessas restrições pode produzir uma configuração visual significativamente diferente.

Figura 2 – A região da esquerda desenhada no Geogebra e a região da direita foi feita no Código do author com orientação relativa.



Fonte: os próprios autores.

Para as regiões apresentadas na Figura: 2, utilizamos as cores azul e vermelho para representar pontos que podem ser alcançados por apenas um par de ângulos articulares, enquanto a cor magenta representa pontos que podem ser alcançados por dois pares distintos de ângulos. Dessa forma, as imagens permitem visualizar não apenas a região de alcance do braço, mas também a quantidade de configurações articulares associadas a cada ponto.

CINEMÁTICA INVERSA

A cinemática inversa consiste em calcular os ângulos ou posições das juntas de um braço robótico para atingir uma posição desejada, podendo ter múltiplas ou nenhuma solução, conforme as restrições do sistema. A natureza do problema da cinemática inversa é não linear, complexa e frequentemente indeterminada.

Para resolver o problema da cinemática inversa de um braço de 2 elos, precisamos determinar os ângulos θ_1 e θ_2 tal que

$$(x, y) = (L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), L_1 \text{sen}\,\theta_1 + L_2 \text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2))$$

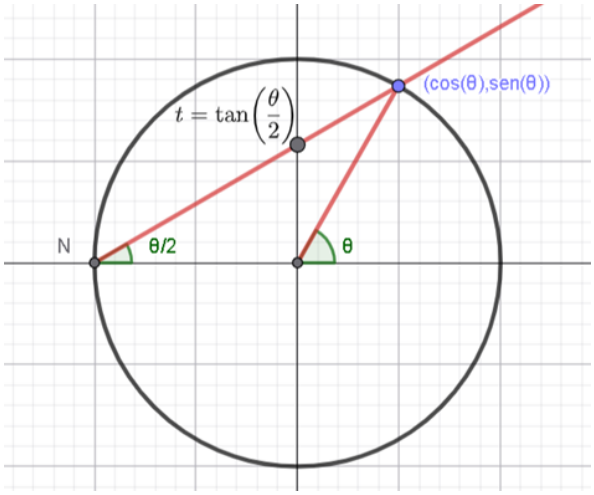
Em [7], foi obtida uma solução para o problema da cinemática inversa de um braço robótico de dois elos, utilizando apenas a lei dos cossenos. Outras abordagens para a solução desse problema podem ser encontradas em [6]. A seguir, apresentamos uma outra solução (solução algébrica) utilizando a projeção estereográfica.

PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

A projeção estereográfica é uma aplicação que mapeia os pontos de um círculo sobre um eixo. Esta permite fazer a transição de equações trigonométricas para equações algébricas.

Considere o círculo unitário $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$ e fixamos $N = (-1, 0) \in \mathbb{S}^1$. A projeção estereográfica mapeia pontos de um círculo $\mathbb{S}^1$ em uma reta (eixo Oy). Vamos considerar a projeção estereográfica a partir do ponto N, isto é, $\pi : \mathbb{S}^1 - \{N\} \to \mathbb{R}$, é dada por $\pi(\cos\theta, sen\,\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Figura 3 – Projeção Estereográfica



Fonte: os próprios autores.

Se escrevemos $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, pelas formulas de ângulo duplo de trigonometria, temos que

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{2\text{t}}{1 + \text{t}^2} \tag{2}$$

então

$$\pi^{-1}(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right).$$

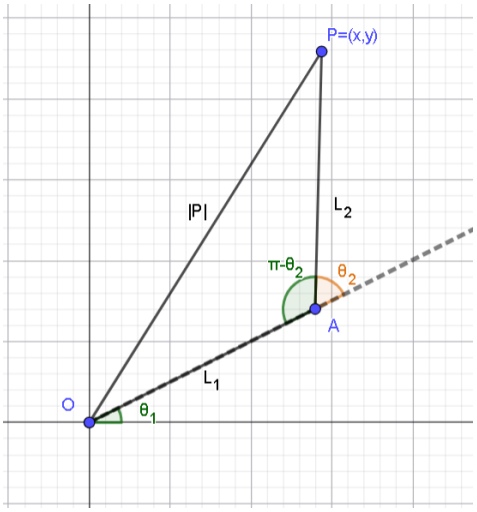
À medida que o ponto $P(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ no círculo se aproxima de N, o ponto correspondente P no eixo Oy se afasta da origem O. Isso sugere que associemos N ao ponto ∞ na reta real estendida projetivamente $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

CINEMÁTICA INVERSA DE BRAÇO ROBÓTICO DE 2 LINKS

Desejamos calcular os ângulos articulares θ_1 e θ_2 tal que satisfaça:

$$\begin{cases} x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ y = L_1 \operatorname{sen}\theta_1 + L_2 \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2). \end{cases} \tag{3}$$

Figura 4 – Representação do braço de 2 links com θ_1 e θ_2



Fonte: os próprios autores.

Para cada $i = 1, 2$, consideremos $\boxed{t_i = \tan(\theta_i/2)}$.

Aplicamos a Lei de cosenos no triângulo OAP da Figura 4,

$$\begin{aligned} |P|^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2cos(\pi - \theta_2) &= L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2\cos\theta_2 \\ &= L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2\left(\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2}\right) \end{aligned}$$

desenvolvendo, temos que:

$$t_2 = \pm\sqrt{\frac{|P|^2 - (L_1+L_2)^2}{(L_1-L_2)^2 - |P|^2}} \quad \text{e} \quad \theta_2 = 2\arctan(t_2). \tag{4}$$

Agora para encontrar θ_1, utilizamos a equação (3)

$$\begin{aligned} x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) &= L_1\cos(\theta_1) + L_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)) \\ &= L_1\left(\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}\right) + L_2\left(\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}\cos(\theta_2) - \frac{2t_1}{1+t_1^2}\operatorname{sen}(\theta_2)\right) \end{aligned}$$

então t_1 satisfaz a seguinte equação quadrática

$$t_1^2(x + L_1 + L_2\cos(\theta_2)) + t_1(2L_2\operatorname{sen}(\theta_2)) + (x - L_1 - L_2\cos(\theta_2)) = 0$$

de onde obtemos

$$t_1 = \frac{-L_2\operatorname{sen}(\theta_2) \pm \sqrt{L_2^2\operatorname{sen}^2(\theta_2) - x^2 + (L_1 + L_2\cos(\theta_2))^2}}{x + L_1 + L_2\cos(\theta_2)} \quad \text{e} \quad \theta_1 = 2\arctan(t_1). \quad (5)$$

É conhecido que a cinemática inversa de um braço com 2 links tem duas soluções (θ_1, θ_2) (sem restrições angulares). A partir das equações algébricas obtidas pelas equações eq (4) e (5), teríamos 4 soluções, das quais devemos selecionar adequadamente e verificar quais destas, de fato, satisfazem as equações da cinemática inversa.

Da equação (4), se θ_2 é solução, então $-\theta_2$ também é solução, então cada par de solução terá um deles como parte do par. Sendo assim, uma solução seria (θ_1, θ_2) e outra $(\hat{\theta}_1, -\theta_2)$. Com isso, resta verificar as 4 soluções possíveis de t_1 e descobrir quais valores θ_1 e $\hat{\theta}_1$ devem satisfazer as equações. Sem perda de generalidade, considere:

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = t_1 = \frac{-L_2\operatorname{sen}(\theta_2) + \sqrt{L_2^2\operatorname{sen}^2(\theta_2) - x^2 + (L_1 + L_2\cos(\theta_2))^2}}{x + L_1 + L_2\cos(\theta_2)}$$

e se denotarmos

$$\tan\left(\frac{\overline{\theta_1}}{2}\right) = \overline{t^1} = \frac{-L_2\operatorname{sen}(\theta_2) - \sqrt{L_2^2\operatorname{sen}^2(\theta_2) - x^2 + (L_1 + L_2\cos(\theta_2))^2}}{x + L_1 + L_2\cos(\theta_2)}$$

temos que θ_1 depende de θ_2, pois t_1 depende de θ_2, e podemos ver que $t_1(\theta_2) = -\overline{t_1(-\theta_2)}$, então os pares de solução estão dados por

$$\begin{cases} (2\tan^{-1}(t_1(\theta_2)), \theta_2) = (\theta_1, \theta_2) \\ (2\tan^{-1}(t_1(\theta_2)), \theta_2) = (\theta_1, \theta_2) \text{ e } (2\tan^{-1}(t_1(-\theta_2)), -\theta_2) = (\hat{\theta}_1, \theta_2) \end{cases}$$

CINEMÁTICA INVERSA DE BRAÇO ROBÓTICO DE 3 LINKS

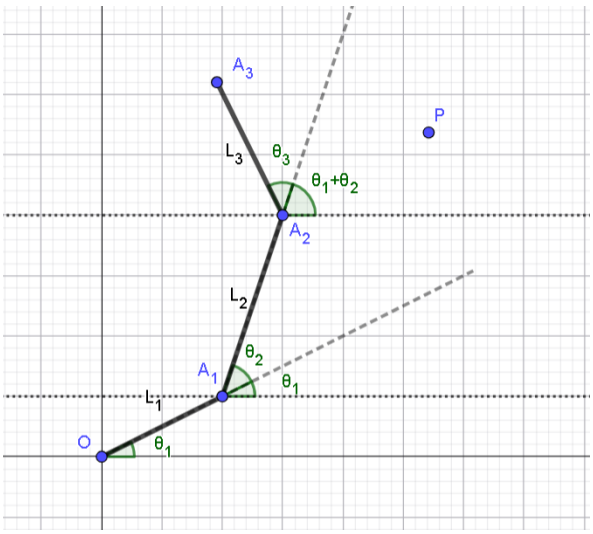
Dados um ponto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, L_1, L_2 e L_3, comprimentos dos braços, desejamos determinar os ângulos θ_1, θ_2 e θ_3 tal que

$$\begin{cases} x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ y = L_1 \operatorname{sen}\theta_1 + L_2 \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \end{cases} \tag{6}$$

Visando um entendimento mais simples do problema, nenhuma restrição aos ângulos θ_i será dada.

Se P for alcançado pelo atuador que está em A_3 (ver figura 5), teremos que o comprimento de A_2 a P deverá ser L_3. Como não há restrições para a configuração do braço, a região gerada pelo braço considerando apenas os 2 primeiros links L_1 e L_2 será um disco de raio externo $L_1 + L_2$ e raio interno $L_1 - L_2$. Caso $L_1 - L_2 < 0$ iremos desconsiderar este arco, pois raio negativo não existe.

Figura 5 – Representação do braço de 3 links e ponto P no plano



Fonte: os próprios autores.

Suponhamos que a cinemática inversa tem solução, então existe uma configuração $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ solução da equação (6). Defina $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ então o ponto A_2, pode ser obtido por $A_2 = P - (L_3 \cos\phi, L_3 \ sen\,\phi) = (x - L_3 \cos\phi, y - L_3 \operatorname{sen}\phi)$. Por equação (4)

$$t_2^2 = \frac{|A_2|^2 - (L_1 + L_2)^2}{(L_1 - L_2)^2 - |A_2|^2} = \frac{(x - L_3\cos\phi)^2 + (y - L_3 sen\,\phi)^2 - (L_1 + L_2)^2}{(L_1 - L_2)^2 - (x - L_3\cos\phi)^2 - (y - L_3 sen\,\phi)^2}$$

$$t_2^2 = \frac{|P|^2 + L_3^2 - (L_1 + L_2)^2 - 2L_3(x\cos\phi + y\,sen\,\phi)}{(L_1 - L_2)^2 - (|P|^2 + L_3^2) + 2L_3(x\cos\phi + y\,sen\,\phi)} \tag{7}$$

Encontrar ϕ tal que a expressão da direita da equação (7) for não negativa significa que a cinemática inversa tem solução. Podemos calcular ϕ usando a projeção estereográfica $t = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)$,

$$\left[|P|^2 + L_3^2 - L_1^2 - L_2^2 - 2L_1L_2\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2} + 2xL_3\right]t^2 - 4L_3\,y\,t + \left[|P|^2 + L_3^2 - L_1^2 - L_2^2 - 2L_1L_2\frac{1-t_2^2}{1+t_2^2} - 2xL_3\right] = 0 \tag{8}$$

A seguir dois casos especiais, quando $\theta_2 = 0$ que significa $t_2 = 0$, e $\theta_2 = \pi$ que significa $t_2 = \infty$ (quando considerada a reta estendida $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$).

No caso $\theta_2 = 0$, temos $|P|^2 + L_3^2 - (L_1 + L_2)^2 - 2L_3(x\cos\phi + y\,\mathrm{sen}\,\phi) = 0$.

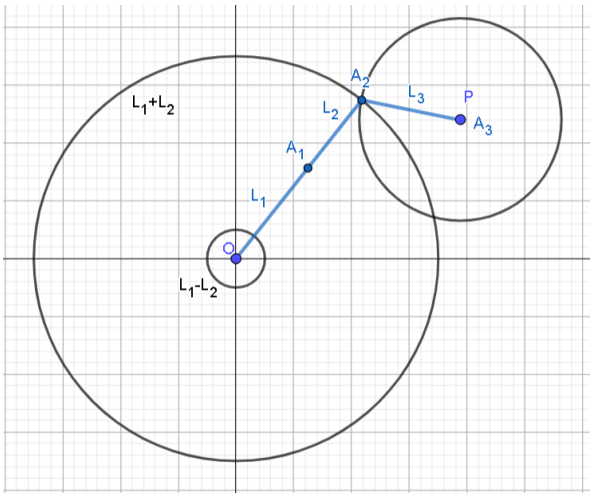
$$\begin{aligned} 0 &= |P|^2 + L_3^2 - (L_1 + L_2)^2 - 2L_3(x\cos\phi + y\,\mathrm{sen}\,\phi) \\ &= |P|^2 + L_3^2 - (L_1 + L_2)^2 - 2L_3\left(x\,\frac{1-t^2}{t^2+1} + y\,\frac{2t}{t^2+1}\right) \end{aligned}$$

resultando na seguinte equação quadrática

$$\left(|P|^2 + L_3^2 - (L_1 + L_2)^2 + 2xL_3\right)t^2 - 4L_3y\,t + \left(|P|^2 + L_3^2 - (L_1 + L_2)^2 - 2xL_3\right) = 0$$

Geométricamente, as duas soluções, quando existirem, representam a intersecção do círculo com centro P e raio L_3, com o círculo de centro na origem e raio $L_1 + L_2$, como na figura 6.

Figura 6 – Disco gerado pelo braço de 2 links L_1 e L_2 com o circulo de centro P e raio L_3.



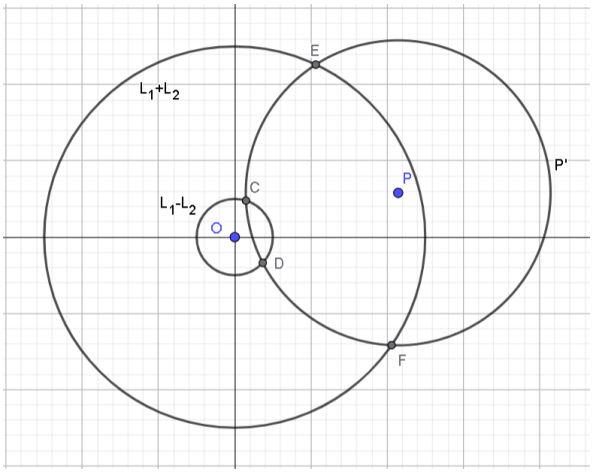
Fonte: os próprios autores.

O caso $\theta_2 = \pi$ significa $(L_1 - L_2)^2 - (|P|^2 + L_3^2) + 2L_3(x\cos\phi + y\,sen\,\phi) = 0$. Procedendo de forma análoga ao caso $\theta_2 = 0$, obtemos a seguinte equação quadrática para $\theta_2 = \pi$:

$$\left(|P|^2 + L_3^2 - (L_1 - L_2)^2 + 2xL_3\right) t^2 - 4L_3 y\, t + \left(|P|^2 + L_3^2 - (L_1 - L_2)^2 - 2xL_3\right) = 0.$$

Assim, quando houver raízes para a equação quadrática no caso em que $\theta_2 = \pi$, essas raízes representam a intersecção do círculo com centro P e raio L_3, com o círculo de centro na origem e raio $L_1 - L_2$. Juntando com o caso de $\theta_2 = 0$, como na figura 7. Poderemos ver que todo ϕ em um intervalo dado por essas raízes implicará que $P'(\phi)$ estará dentro da região gerada pelo braço de 2 links L_1 e L_2, então todos estes ϕ serão solução para cinemática inversa de 3 links.

Figura 7 – Os pontos E e F correspondem às interseções entre o círculo de centro O e raio $L_1 + L_2$ e o círculo de centro P e raio L_3. Analogamente, C e D correspondem às interseções entre o círculo de centro O e raio $L_1 - L_2$ e o círculo de centro P e raio L_3.



Fonte: os próprios autores.

CONCLUSÃO

A projeção estereográfica permitiu transportar o problema da cinemática inversa, que é um problema que envolve resolver equações contendo funções trigonométricas em equações mais simples, a saber, em equações quadráticas. Sendo assim, a projeção estereográfica permitiu a passagem para um tratamento algébrico da cinemática inversa. Permitindo encontrar uma solução algébrica para a cinemática inversa de um braço de 3 links sem restrições para os ângulos e permitindo que futuramente possamos adicionar restrições.

AGRADECIMENTOS

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESu/MEC pelo fomento.

REFERÊNCIAS

[1] Bruno Siciliano, Oussama Khatib; Springer Handbook of Robotics. 2016.

[2] Chuck Rose, Seth Rosenthal, John Pella; The Process of Motion Capture: Dealing with the Data. Microsoft Research, Disponível em: <https://ai.stanford.edu/~latombe/cs99k/2000/capture.pdf>.

[3] M. John, D. Hayes; Introduction to Robotics, Disponível em: <https://carleton.ca/johnhayes/wp-content/uploads/MECH4503.pdf>. Acesso em: 23 de Jan. 2008

[4] RSI Updates; Citizencon 2017: Teaching a character how to walk on any terrain. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PryJ3CpHcXQ>. Acesso em: 27 de out. de 2017;

[5] Unity. Disponível em: <https://unity.com/pt>.

[6] Yu Xiang; Inverse Kinematics. CS 6301 Special Topics: Introduction to Robot Manipulation and Navigation. The University of Texas at Dallas. Disponível em: <https://yuxng.github.io/Courses/CS6301Fall2024/lecture_18_inverse_kinematics.pdf>. Acesso em: 21 out. 2024.

[7] Enrique Barbosa Oliveira, Luis Florial Espinoza Sánchez, Santos Alberto Enriquez Remigio; Cinemática Inversa com Referências Relativa e Global: Uma Implementação em Unity com HLSL e C#. Anais da XIV Mostra IC, 2025. Disponível em:

<https://eventos.ufu.br/sites/eventos.ufu.br/files/documentos/anais_da_xiv_mostra_ic_2025.pdf#page=44>.