UMA INTRODUÇÃO AO TEOREMA DE PICARD-LINDELÖF

Domingues, Jefther Gabriel Cardoso[1]

Ferreira, Adeval Lino[2]

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar os conceitos iniciais acerca do estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias e caracterizar as funções que vêm a ser soluções de tais equações. Apesar de serem assumidos como conhecidos alguns resultados sobre análise real e espaços métricos, os conceitos e definições mais relevantes para o tópico principal serão formalmente apresentados. Inicialmente, introduzem-se as equações diferenciais, alguns exemplos e o Problema de Valor Inicial (Problema de Cauchy). Depois, são apresentadas as principais condições topológicas e analíticas que garantem a existência e unicidade locais. Por fim, trata-se da demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de Picard-Lindelöf e caracterizam-se construtivamente algumas das soluções apresentadas.

Palavras-chave: Análise matemática; Equações diferenciais ordinárias; Espaços métricos; Teorema de Picard–Lindelöf; Aproximações sucessivas.

NOÇÕES BÁSICAS

Definição 1.1. *Dada uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, chama-se a equação*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{1.1}$$

de equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Observação 1.1. *A equação* (1.1) *se chama diferencial pois envolve uma derivada, ordinária pois a derivada nela contida é em respeito a uma única variável independente t, e de primeira ordem pois o maior grau da derivada envolvida é 1. Ela é representada abreviadamente por*

$$x' = f(t, x)$$

e sua incógnita é a função $x = x(t)$

Definição 1.2. *Uma função diferenciável $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é dita ser uma solução da equação* (1.1) *se*

[1]Universidade Estadual de Londrina (UEL); Curso de Matemática; jefther.gabriel@uel.br.
[2]Universidade Estadual de Londrina (UEL); Departamento de Matemática; adeval@uel.br.

1. $\{(t, \varphi(t)); t \in I\} \subset \Omega$ *e*
2. $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ *para todo* $t \in I$.

Exemplo 1.1. *Considere a equação*

$$\frac{dx}{dt} = x.$$

Pode-se intuir facilmente a partir de conhecimentos de cálculo que $\varphi(t) = e^t$ *é uma solução da equação quando definida em* $I = \mathbb{R}$.

Através de substituição direta,

1. $(t, e^t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *e*
2. $\frac{d(e^t)}{dt} = e^t$

verificam-se para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nota-se também que qualquer função da família $\varphi(t) = ke^t$, *onde* $k \in \mathbb{R}$ *é uma constante é solução desta equação, para trabalharmos unicidade de soluções precisamos apresentar o problema de Cauchy.*

Definição 1.3. *Dado* $(t_0, x_0) \in \Omega$, *o problema de Cauchy ou problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

consiste em encontrar uma solução $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *da equação* (1.1) *num intervalo que contém* t_0 *e que satisfaça a condição* $\varphi(t_0) = x_0$ *que é chamada de dado inicial.*

Exemplo 1.2. *Considere a mesma equação dada no exemplo anterior* $x' = x$, *agora com o dado inicial* $x(0) = x_0$, *como sabemos que a família* $ke^t, k \in \mathbb{R}$ *contém soluções, podemos substituir* $t = 0$ *para encontrarmos uma solução que satisfaça o dado inicial. Assim* $ke^0 = x_0$ *implica* $k = x_0$, *assim* $\varphi(t) = x_0e^t$ *é uma solução do problema de Cauchy.*

Um método formal para encontrar tal solução será apresentado ao final deste trabalho.

Proposição 1.1. *O problema de valor inicial é equivalente à seguinte equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \tag{1.2}$$

Demonstração. Assumindo que $x = x(t)$ é uma solução do PVI, para todo $t \in I$ temos

$$x'(t) = f(t,x) \implies x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds \implies x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds,$$

pois x e f são contínuas, e portanto integráveis em cada intervalo limitado. Por outro lado, se a equação vale para todo $t \in I$, então $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s,x(s))\,ds = x_0$, e derivando, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$x'(t) = f(t,x(t))$$

para todo $t \in I$. □

Apesar dos exemplos anteriores trabalharem o caso $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, as equações tem forma mais geral, onde $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, diz-se que a equação tem dimensão n, onde as soluções tomam valores em $\mathbb{R}^n$. Neste caso, buscam-se soluções em cada componente $f_i : \Omega \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, isto é, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ é uma solução de (1.1) se, e somente se, cada φ_i é solução da equação de dimensão 1 da respectiva componente, ou seja, $(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in \Omega$ e

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt}(t) = f_1(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \\ \frac{d\varphi_2}{dt}(t) = f_2(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt}(t) = f_n(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \end{cases}$$

valem para todo $t \in I$.

Exemplo 1.3. *Considere a equação em* $\mathbb{R}^2$*,*

$$(x,y)' = (y,-x),$$

o problema de encontrar a solução, consiste em encontrar funções $x(t)$ *e* $y(t)$ *que satisfaçam o sistema,*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Não é difícil, novamente, intuir através de um curso de Cálculo que duas funções que se relacionam por suas derivadas de tal maneira são

$$x(t) = \operatorname{sen}(t), \quad y(t) = \cos(t).$$

Um método formal para encontrar tal solução também será apresentado ao final deste trabalho.

ESPAÇOS MÉTRICOS E CONDIÇÃO DE LIPSCHITZ

Antes de prosseguir, precisamos de alguns conceitos preliminares sobre espaços métricos com o objetivo de definir uma distância entre funções.

Definição 2.1. *Seja $(x_n)_n = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço métrico (X, d). Dizemos que:*

1. *$(x_n)_n$ é uma sequência convergente se existe $x \in X$ tal que*

$$d(x_n, x) \to 0 \text{ quando } n \to \infty;$$

2. *$(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ para todos } n, m > n_0.$$

Definição 2.2. *Um espaço métrico (X, d) é dito ser completo se toda sequência de Cauchy em X é convergente.*

Por exemplo, o espaço $\mathbb{R}^n$ individualmente com cada uma das três normas apresentadas anteriormente, é um espaço métrico completo.

Exemplo 2.1. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto e $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. O conjunto $C(K, F)$, formado por todas as funções contínuas $\varphi : K \to F$, munido da métrica uniforme definida como*

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t\in K} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$$

é um espaço métrico completo.

Definição 2.3. *Uma transformação $F : X \to X$ num espaço métrico (X, d) é dita ser uma contração se existe $K \in (0, 1)$ tal que*

$$d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$$

para todos $x, y \in X$.

Definição 2.4. *Diz-se que $x_0 \in X$ é um ponto fixo de uma transformação $F : X \to X$ se $F(x_0) = x_0$.*

Definição 2.5. *Um ponto fixo $x_0 \in X$ de uma transformação $F : X \to X$ é dita ser atrator se para cada $x \in X$ temos $F^n(x) \to x_0$ quando $n \to \infty$.*

A seguir é apresentado o Teorema do Ponto Fixo de Banach, como Lema da Contração.

Lema 2.1 (Lema da Contração)**.** *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma contração, isto é,*

$$d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y), \qquad 0 \leq K < 1.$$

Existe um único ponto fixo p para F, isto é, $F(p) = p$. Além disso, p é um atrator de F, isto é,

$$F^n(x) \to p$$

quando $n \to \infty$, para todo $x \in X$.

Demonstração. Unicidade: sejam p e q dois pontos fixos.

$$d(p, q) = d(F(p), F(q)) \leq Kd(p, q),$$

ou seja, $(1-K) \cdot d(p, q) \leq 0$. Como $0 \leq K < 1$, segue que $1-K > 0$, e como $d(p, q) \geq 0$ para quaisquer p, q, isso implica que $d(p, q) = 0$, donde conclui-se $p = q$.

Existência: Considere $x_0 \in X$, e a sequência iterativa (x_n) tal que $x_n = F(x_{n-1})$, o que implica, $x_n = F^n(x_0)$.

Assim,

$$d(x_2, x_1) = d(F(x_1), F(x_0)) \leq Kd(x_1, x_0)$$

e também,

$$d(x_3, x_2) = d(F(x_2), F(x_1)) \leq Kd(x_2, x_1) \leq K^2 d(x_1, x_0).$$

Dssa forma, observamos via indução matemática que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq K^n d(x_1, x_0).$$

Tomando dois termos x_n e x_{n+r}, segue pela desigualdade triangular que

$$d(x_n, x_{n+r}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+r-1}, x_{n+r}),$$

e assim,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+r}) &\leq K^n d(x_1, x_0) + K^{n+1} d(x_1, x_0) + \ldots + K^{n+r-1} d(x_1, x_0) \\ &\leq K^n d(x_1, x_0)(1 + K + K^2 + \ldots + K^{r-1}). \end{aligned}$$

Como $1 + K + K^2 + \ldots + K^{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} K^i$ é uma soma parcial da série geométrica de razão K, tal que $|K| < 1$, esta soma pode ser limitada pela série infinita que converge para $\frac{1}{1-K}$. Portanto

$$1 + K + K^2 + \ldots + K^{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} K^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} K^i = \frac{1}{1-K}.$$

Deste modo,

$$d(x_n, x_{n+r}) \leq K^n d(x_1, x_0)(1 + K + K^2 + \ldots + K^{r-1}) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_1, x_0).$$

Como a constante K satisfaz $0 \leq K < 1$, temos que $\lim_{n\to\infty} K^n = 0$. Consequentemente, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+r}) = 0$.

E portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy. Por hipótese, (X, d) é um espaço métrico completo, o que nos garante que toda sequência de Cauchy converge para algum limite no próprio espaço. Logo, existe um ponto $p \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Resta mostrar que esse limite p é um ponto fixo. Como toda contração é uma

função contínua, temos que

$$F(p) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

Portanto, $F(p) = p$, o que demonstra que p é ponto fixo de F. □

Corolário 2.1. *Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \to X$ é contínua e, para algum m, F^m é uma contração, então existe um único ponto fixo p para F. Além disso, p é um atrator de F, isto é, $F^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Como F^m é uma contração em um espaço completo, o Lema da Contração (2.1) garante que existe um único ponto fixo $p \in X$ de F^m, ou seja, $F^m(p) = p$ e além disso, p é atrator de F^m.

Seja $n = mq + r$, onde $0 \leq r \leq m - 1$, deste modo

$$F^n(x) = F^{mq+r}(x) = (F^m)^q(F^r(x)).$$

Se $n \to \infty$, então $q \to \infty$. Seja $F^r(x) = y$, então $\lim_{n\to\infty}(F^m)^q(y) = p$ pois p é atrator de F^m. Assim $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = p$ e p é também atrator de F.

Resta provar que $F(p) = p$. Com efeito, utilizando a continuidade de F:

$$\lim_{n\to\infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} F(F^n(x)) = F(\lim_{n\to\infty}(F^n(x)) = F(p).$$

Logo, p é ponto fixo de F.

Por fim, para provar a unicidade, suponha que exista outro ponto fixo $q \in X$ de F, ou seja, $F(q) = q$. Aplicando F sucessivas vezes, obtém-se $F^m(q) = q$. Ou seja, q é ponto fixo de F^m. Pelo Lema da Contração (2.1), o ponto fixo p de F^m é único. Portanto, $p = q$, o que encerra a demonstração.

□

Definição 2.6. *Uma aplicação $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ chama-se Lipschitziana em Ω relativamente à segunda variável ou simplesmente Lipschitziana se existe uma constante $K \geq 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|$$

para todos $(t,x),(t,y) \in \Omega$. *Tal* K *é dita constante de Lipschitz de* f.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Teorema 3.1 (Teorema de Picard–Lindelöf)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *tal que* $\Omega = I_a \times B_b$*, onde* $I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\}$ *e* $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}$ *são conjuntos compactos. Suponha que* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *satisfaça as seguintes condições:*

1. f *é contínua no conjunto compacto* Ω*, e consequentemente, limitada por uma constante* $M > 0$*, isto é,* $\|f(t,x)\| \leq M$ *para todo* $(t,x) \in \Omega$*;*

2. f *é Lipschitziana em relação à segunda variável em* Ω.

Então, o Problema de Cauchy

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

possui uma única solução definida no intervalo I_α*, onde* $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Demonstração. Como visto em (1.2), o problema de Cauchy é equivalente à equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Motivados por essa equivalência e assegurados pelo Exemplo (2.1), consideremos o espaço métrico completo $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \to B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

Para $\varphi \in X$ definimos o operador de Picard $F(\varphi) : I_\alpha \to E$ por:

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad t \in I_\alpha.$$

Note que resolver o nosso problema de valor inicial equivale exatamente a encontrar um ponto fixo para este operador, ou seja, uma função φ tal que $F(\varphi) = \varphi$.

Objetivando aplicar o Corolário do Lema da Contração (2.1), mostremos que:

(1) $F(X) \subset X$;

(2) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Onde $F^n(\varphi) = F(F^{n-1}(\varphi))$ e $F^0 = \mathrm{Id}$.

De fato, para todo $t \in I_\alpha$,

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

logo

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \right\|.$$

Usando a desigualdade triangular para integrais:

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s))\|\, ds \right|.$$

Como por hipótese $\|f(s, \varphi(s))\| \leq M$, segue que:

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M\, ds \right| = |M(t - t_0)| = M|t - t_0|$$

Como $|t - t_0| \leq \alpha$, segue que

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| \leq M\alpha$$

E uma vez que $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, segue que

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| \leq M\frac{b}{M} = b.$$

O que implica que

$$F(\varphi(t)) \in B_b,$$

deste modo

$$F(\varphi) \in X, \qquad \forall \varphi \in X.$$

Assim temos $F(X) \subset X$, o que conclui (1).

Quanto à (2), mostremos por indução sobre n que para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$,

$$\|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)\| \leq \frac{K^n|t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha, \tag{3.1}$$

onde K é a constante de Lipschitz de f.

Para $n = 0$ ela é óbvia:

$$\|F^0(\varphi_1)(t) - F^0(\varphi_2)(t)\| = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq d(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{K^0|t - t_0|^0}{0!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Agora, supondo-se que a desigualdade (3.1) é válida para $n = k$. Então

$$\begin{aligned}
\|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)\| &= \|F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)\| \\
&= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\varphi_1)(s))\, ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, F^k\varphi_2(s))\, ds \right) \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))\, ds \right\| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))\|\, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} K \left\| F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s) \right\|\, ds \right| \\
&\leq K \left| \int_{t_0}^{t} \frac{K^k|s - t_0|^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2)\, ds \right| \\
&= \frac{K^{k+1}}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^k\, ds \\
&= \frac{K^{k+1}|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2).
\end{aligned}$$

Uma vez que isto é válido ara qualquer t, em particular

$$d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

E note que $\frac{(K\alpha)^n}{n!}$ é o termo geral de uma série que converge para $e^{K\alpha}$, donde

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(K\alpha)^n}{n!} = 0,$$

e portanto, para n suficientemente grande, $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$ e F^n é uma contração em X.

Aplicamos o Corolário do Lema da Contração para concluir que existe um único ponto fixo $\varphi \in X$ para F tal que $F(\varphi) = \varphi$. □

O Teorema de Picard-Lindelöf é construtivo, ele não apenas garante a existência e

unicidade da solução do problema de Cauchy, mas nos fornece um método para encontrá-la.

A sequência de funções gerada pelas iterações do operador F, definida por $\varphi_n = F(\varphi_{n-1})$, uma vez que o espaço é completo e o operador é uma contração, essa sequência converge uniformemente para a solução exata φ.

A seguir, encontramos soluções dos exemplos (1.2) e (1.3) usando o método de aproximações sucessivas de Picard.

Exemplo 3.1. *Considere a equação $x' = x$ com a condição inicial $x(0) = x_0$. O operador de Picard para este problema é dado por:*

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

Tomando a aproximação inicial:

$$\varphi_0(t) = x_0,$$

obtemos as iterações:

$$\varphi_1(t) = F(\varphi_0)(t) = x_0 + \int_0^t x_0\, ds = x_0(1+t),$$

$$\varphi_2(t) = F(\varphi_1)(t) = x_0 + \int_0^t x_0(1+s)\, ds = x_0 + x_0 t + x_0\frac{t^2}{2} = x_0(1+t+\frac{t^2}{2}),$$

$$\varphi_3(t) = F(\varphi_2)(t) = x_0 + \int_0^t x_0(1+s+\frac{s^2}{2})\, ds = x_0 + x_0 t + x_0\frac{t^2}{2!} + x_0\frac{t^3}{3!}.$$

Por indução, o n-ésimo termo da sequência é:

$$\varphi_n(t) = x_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

Tomando o limite, reconhecemos a série de Taylor da função exponencial

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} x_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = x_0 e^t.$$

Provando que o resultado anteriormente intuído é de fato a única solução do problema de valor inicial.

Exemplo 3.2. *Considere a equação* $(x, y)' = (y, -x)$ *com a condição inicial* $(x(0), y(0)) = (0, 1)$.

Como a função que rege o sistema é $f(x, y) = (y, -x)$*, aplicaremos o método vetorialmente. Considere o operador*

$$\Phi_i(t) = \Phi_0 + \int_0^t f(\Phi_{i-1}(s))\, ds$$

Com $\Phi_0(t) = (0, 1)$*, assim as iterações são*

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= (0,1) + \int_0^t (1,0)\, ds \\ &= (t, 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(t) &= (0,1) + \int_0^t (1,-s)\, ds \\ &= \left(t, 1 - \frac{t^2}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(t) &= (0,1) + \int_0^t (1 - \frac{s^2}{2}, -s)\, ds \\ &= \left(t - \frac{t^3}{3!}, 1 - \frac{t^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Por indução, podemos denotar as coordenadas da n*-ésima iteração como* $\Phi_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$*, em que:*

$$x_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$y_n(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Uma vez que foram construídas as séries de Taylor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} = \operatorname{sen}(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cos(t)$$

teremos que $(x(t), y(t)) = (\operatorname{sen}(t), cos(t))$ *é a solução do problema de Cauchy.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho evidenciou a importância da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. O desenvolvimento rigoroso do Teorema de Existência e Unicidade de Picard–Lindelöf ilustra como conceitos de Análise e Topologia se conectam para fundamentar de forma sólida o estudo das EDOs. Mais do que estudo abstrato autocontido, essa construção teórica atua de forma a conectar a formação inicial nos cursos de graduação aos tópicos avançados de pesquisa, sendo essencial para o amadurecimento matemático de um pesquisador.

A partir da base aqui estabelecida, a continuidade natural deste projeto tem permitido explorar desdobramentos diretos da teoria. Entre eles, ganham destaque o estudo de soluções maximais e seus prolongamentos, assim como de corolários que garantem a existência global. Torna-se possível, também, contrastar esses resultados com o Teorema de Peano, que assegura a existência de soluções sob a hipótese mais fraca de apenas continuidade. Além disso, a teoria se estende de maneira fluida para equações lineares através do caso matricial, abrindo caminho para o estudo e a classificação de retratos de fase para sistemas simples.

REFERÊNCIAS

SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

SOTOMAYOR, J. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 1. ed. São Paulo: LF Editorial, 2011.

BARREIRA, L.; VALLS, C. **Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory**. 1. ed. Providence: American Mathematical Society, 2012.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Volume 1.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Volume 2.