Elementos de Álgebra Homológica: Dos R-Módulos à Homologia de Complexos de Cadeias

Almeida, Kaic Porfírio[1]

Coelho, Francielle Rodrigues de Castro[2]

Resumo: A Álgebra Homológica desempenha papel fundamental na Matemática, especialmente na Topologia Algébrica, por permitir a investigação de propriedades de objetos topológicos e geométricos por meio de estruturas e ferramentas algébricas. Este trabalho apresenta, de forma gradual e didática, uma introdução a conceitos centrais dessa teoria, desenvolvida no âmbito de um projeto de Iniciação Científica. A fundamentação teórica aborda a estrutura de R-módulos e R-homomorfismos como generalizações de espaços vetoriais e transformações lineares, evoluindo para a análise de módulos quocientes, núcleos, imagens, sequências exatas e diagramas comutativos. Em seguida, introduzem-se as sequências semi-exatas e os módulos derivados, culminando no conceito de complexo de cadeias e no cálculo de sua respectiva homologia. Para ilustrar e consolidar a teoria exposta, são discutidos exemplos concretos com cálculos explícitos de homologia e demonstradas proposições relevantes. Esse conjunto de resultados fornece a base necessária para o prosseguimento de estudos em tópicos avançados, como homomorfismos induzidos e sequências exatas longas em homologia.

Palavras-chave: Álgebra Homológica; R-Módulos; Sequências Exatas; Complexos de Cadeias; Homologia.

INTRODUÇÃO

A Álgebra Homológica constitui uma importante área da Matemática, desempenhando papel central no desenvolvimento de teorias em Topologia Algébrica, Álgebra e Geometria. Por meio de ferramentas algébricas, é possível investigar propriedades de objetos topológicos e geométricos a partir das relações estabelecidas entre estruturas mais simples, possibilitando uma compreensão mais profunda de tais objetos.

Nesse contexto, conceitos como módulos, homomorfismos, sequências exatas e diagramas comutativos assumem grande relevância teórica. Assim, este trabalho tem como foco a introdução de alguns tópicos cruciais de Álgebra Homológica, juntamente com a apresentação de exemplos acerca destes tópicos.

[1]Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia (IME-UFU); Bacharelado em Matemática; kaic.almeida@ufu.br

[2]Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia (IME-UFU); francielle@ufu.br

As definições apresentadas constituem o fundamento teórico necessário para alcançar o objetivo deste trabalho: introduzir o conceito de cadeias de complexos e o cálculo de sua homologia. Para tanto, realizou-se uma revisão bibliográfica de conceitos e resultados clássicos, embasada nas seguintes obras: [1], [2] e [3].

R-MÓDULOS E R-HOMOMORFISMOS

Nesta seção, reunimos conceitos e resultados da Álgebra Homológica que serão fundamentais para o desenvolvimento das discussões ao longo do trabalho.

DEFINIÇÃO DE MÓDULO E SUBMÓDULO

A definição a seguir consiste em uma generalização do conceito de espaço vetorial, em que o conjunto de escalares é dado por um anel com unidade.

Definição 2.1. *Seja R um anel com unidade. Um* **módulo à esquerda de R** *(ou simplesmente um R-**módulo à esquerda**) é um conjunto M não vazio sobre o qual são definidas as operações*

$$+\colon M \times M \longrightarrow M \qquad\qquad \cdot\colon R \times M \longrightarrow M$$
$$(m,n) \longmapsto m+n \qquad\qquad (a,m) \longmapsto a \cdot m$$

que satisfazem as propriedades:

i. *$(M,+)$ é grupo abeliano;*

ii. $a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m, \forall a, b \in R, \forall m \in M$;

iii. $(a+b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m, \forall a, b \in R, \forall m \in M$;

iv. $a \cdot (m+m') = a \cdot m + a \cdot m', \forall a \in R, \forall m, m' \in M$;

v. $1_R \cdot m = m, \forall m \in M$.

Um R-módulo à esquerda é denotado por ${}_RM$. Ademais, de forma análoga se define um módulo à direita sobre R (ou simplesmente um R-módulo à direita), cuja notação é M_R.

Exemplo 2.2. *Todo espaço vetorial V sobre um corpo K é um K-módulo.*

Exemplo 2.3. *Todo anel pode ser considerado um módulo sobre si mesmo.*

Exemplo 2.4. *Todo grupo abeliano $(G, +)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo.*

De fato, basta considerar a lei de composição externa $\mathbb{Z} \times G \to G$ em que a cada par $(n, g) \in \mathbb{Z} \times G$ associa o elemento

$$ng = n \cdot g = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ g + g + \ldots + g \quad (n \text{ vezes}), & \text{se } n > 0 \\ (-g) + (-g) + \ldots + (-g) \quad (n \text{ vezes}), & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Definição 2.5. *Seja M um módulo sobre um anel R. Um subconjunto $N \neq \emptyset$ contido em M é dito um* **submódulo** *de M se N é fechado para a soma e a multiplicação por escalares (isto é, se $s, t \in N$ e $a \in R$, então $s + t \in N$ e $as \in N$) e satisfaz as propriedades da Definição 2.1 em relação à operação definida no R-módulo M.*

Denotamos que N é submódulo de um módulo M por $N \leq M$.

Exemplo 2.6. *O conjunto $\mathbb{Z}_6$ é um módulo à esquerda sobre o anel dos inteiros, isto é, um $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda. Além disso, o subconjunto $N = \{\overline{0}, \overline{3}\} \subset \mathbb{Z}_6$ é um submódulo de $\mathbb{Z}_6$.*

Exemplo 2.7. *Seja R um anel. Então o conjunto R é um R-módulo à esquerda. Além disso, um ideal qualquer de R é um submódulo do módulo R.*

MÓDULO QUOCIENTE

Sejam M um R-módulo e N um submódulo de M. Note que N é subgrupo do grupo abeliano M em relação à operação definida por "$+$". Com isso, o grupo quociente dado por

$$Q = M/N = \{m + N \mid m \in M\}$$

em que $(m + N) + (m' + N) = (m + m') + N$, é um grupo abeliano.

Sejam $a \in R$ e $m + N \in M/N$. A operação dada por $a(m + N) = am + N$ está bem definida, o que pode ser facilmente verificado por:

$$\begin{aligned} m + N = m' + N &\implies (m - m') \in N \\ &\implies a(m - m') \in N \\ &\implies am - am' \in N \\ &\implies am + N = am' + N \\ &\implies a(m + N) = a(m' + N). \end{aligned}$$

Definição 2.8. *Sejam M um R-módulo e $N \leq M$. O R-módulo M/N é chamado de* **módulo quociente de M por N.**

R-HOMOMORFISMOS

Agora que os conceitos de módulo e submódulo foram devidamente apresentados, é possível definir os chamados R-homomorfismos.

Definição 2.9. *Sejam M e N R-módulos. Uma aplicação $f : M \to N$ tal que, $\forall m, m' \in M$ e $\forall a \in R$:*

$$f(m + m') = f(m) + f(m')$$

$$f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$$

*é chamada de R-**homomorfismo**.*
*Além disso, se f é injetora, chamamos f de R-**monomorfismo**. Se f é sobrejetora, denominamos R-**epimorfismo**. Por fim, se f é simultaneamente injetora e sobrejetora, trata-se de um R-**isomorfismo**.*

Definição 2.10. *Sejam M e N R-módulos e $f : M \to N$ um R-homomorfismo. Os conjuntos chamados* **núcleo** *e* **imagem** *do R-homomorfismo f são denotados respectivamente por $Ker(f)$ e $Im(f)$, e são definidos por:*

$$Ker(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0\} \qquad Im(f) = \{n \in N \mid \exists m \in M, \text{tal que } f(m) = n\}.$$

Exemplo 2.11. *Sejam M um R-módulo e $N \leq M$. Então as aplicações:*

$$\begin{aligned} i\colon N &\longrightarrow M & \qquad j\colon M &\longrightarrow M/N \\ m &\longmapsto m & \qquad m &\longmapsto m+N \end{aligned}$$

são R-homomorfismos. Em particular, i é um R-monomorfismo denominado "inclusão", enquanto j é um R-epimorfismo denominado "projeção canônica". Ademais, temos que $Ker(i) = \{0\}$ e $Im(i) = N$, enquanto $Ker(j) = N$ e $Im(j) = M/N$.

Proposição 2.12. *Um R-homomorfismo é injetivo se, e somente se, $Ker(f) = \{0\}$.*

Demonstração. $(\implies)$ Se f é injetivo, então para quaisquer $x, y \in M$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Daí, se $m \in Ker(f)$, então $f(m) = 0$. Logo, como $f(0) = 0$, temos que

$$f(m) = f(0) \implies m = 0.$$

Portanto, $Ker(f) = \{0\}$.

$(\impliedby)$ Se $Ker(f) = \{0\}$ e $f(x) = f(y)$, então

$$f(x) - f(y) = 0 \iff f(x-y) = 0,$$

ou seja, $x - y \in Ker(f)$. Assim, $x - y = 0$, logo $x = y$. Portanto, f é injetivo. ■

SEQUÊNCIAS EXATAS E DIAGRAMAS COMUTATIVOS

Uma vez introduzidos os conceitos de R-homomorfismos, núcleo e imagem, podemos descrever diagramas de R-módulos. Considere, por exemplo, um R-módulo M e um submódulo $N \leq M$.

As aplicações de inclusão e projeção canônica, apresentadas no Exemplo 2.11, quando compostas, primeiro de N em M e, em seguida, de M em M/N, dão origem ao diagrama

$$N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M/N.$$

Nesse contexto, um elemento $n \in N$ é inicialmente enviado a M pela aplicação de inclusão i e, posteriormente, à sua classe lateral em M/N pela projeção canônica j.

Com esta construção, introduzimos um caso particular de diagrama de R-módulos e nos motivamos para os conceitos das subseções a seguir: 3.1 e 3.2.

DEFINIÇÃO E RESULTADOS DE SEQUÊNCIAS EXATAS

Definição 3.1. *Sejam $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos e $\{f\colon M_i \to M_{i+1}\}_{i\in I}$ uma família de R-homomorfismos, sendo I um conjunto de índices (finito ou infinito). Então, o diagrama:*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

é chamado de **sequência exata** *se $Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$, $\forall i \in I$, exceto nos extremos da sequência (se houver).*

Em particular, podemos dizer que uma sequência é exata em M_i se $Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$.

Proposição 3.2. *A sequência $0 \xrightarrow{n} F \xrightarrow{f} G$ é exata se, e somente se, f for um R-monomorfismo.*

Demonstração. $(\implies)$ Se a sequência é exata, então $Ker(f) = Im(n)$. Mas $Im(n) = \{0\}$, logo $Ker(f) = \{0\}$. Portanto, pela Proposição 2.12, f é um monomorfismo.

$(\impliedby)$ Se f é um R-monomorfismo, pela Proposição 2.12, $Ker(f) = \{0\}$. Mas $Im(n) = \{0\}$, logo, $Ker(f) = Im(n)$, e a sequência é exata. ■

Proposição 3.3. *A sequência $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{n} 0$ é exata se, e somente se, f for um R-epimorfismo.*

Demonstração. $(\implies)$ Se a sequência é exata, então $Im(f) = Ker(n)$. Mas $Ker(n) = G$. Portanto, $Im(f) = G$, e f é sobrejetora.

$(\impliedby)$ Se f é um R-epimorfismo, então $Im(f) = G$. Mas como n é o R-homomorfismo nulo, $Ker(n) = G$. Daí, como $G = Ker(n) = Im(f)$, a sequência é exata. ■

Exemplo 3.4. *Sejam f o R-homomorfismo que leva $n \in \mathbb{Z}$ em $2n$, e j a projeção canônica dos elementos de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_2$. A sequência definida por:*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_2$$

é exata, pois $Im(f) = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = Ker(j)$.

DIAGRAMAS COMUTATIVOS

É válido dizer que sequências exatas são um tipo de diagrama de R-módulos, em que os R-homomorfismos são aplicados sequencialmente “em linha". No entanto, diagramas podem ser desenvolvidos de maneira muito mais elaborada e complexa que neste caso particular, por meio de R-homomorfismos em colunas e outras ramificações.

Definição 3.5. *Consideremos os seguintes diagramas de R-módulos e R-homomorfismos:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow^{\theta} & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ & & C \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ F & \xrightarrow[k]{} & G \end{array}$$

O primeiro diagrama diz-se comutativo se $\theta = \psi \circ \varphi$. Da mesma forma, o segundo diagrama diz-se comutativo se $g \circ f = k \circ h$. Assim, chamamos esses diagramas de triângulo comutativo e quadradro comutativo, respectivamente.

SEQUÊNCIAS SEMI-EXATAS E MÓDULOS DERIVADOS

Nas seções anteriores, foram introduzidos os conceitos de R-módulos, R-homomorfismos, sequências exatas, núcleo e imagem, que serão de extrema importância para a construção das definições de sequência semi-exata e complexo de cadeias e para o cálculo de homologia nas seções 4 e 5.

A próxima definição nos mostra que o conceito de sequências semi-exatas generaliza o conceito de sequências exatas.

Definição 4.1. *Sejam $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos e $\{f\colon M_i \to M_{i+1}\}_{i\in I}$ uma família de R-homomorfismos, sendo I um conjunto de índices (finito ou infinito). Então, o diagrama:*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

é chamado de **sequência semi-exata** *se $Im(f_{i-1}) \subset Ker(f_i)$, $\forall i \in I$, exceto nos extremos da sequência (se houver).*

Em particular, podemos dizer que uma sequência é semi-exata em M_i se $Im(f_{i-1}) \subset Ker(f_i)$.

Lema 4.2. *A composição $h = g \circ f$ de dois homomorfismos $f : M \to N$ e $g : N \to M$ de módulos é o homomorfismo trivial se, e somente se, $Im(f) \subseteq Ker(g)$.*

Demonstração. $(\implies)$ Se $h = g \circ f = 0$ então $\forall m \in M$, $g(f(m)) = 0$, ou seja, $f(m) \subset Ker(g)$, portanto, $Im(f) \subset Ker(g)$.

$(\impliedby)$ Seja $Im(f) \subset Ker(g)$. Considere $h = g \circ f$. Como $Im(f)$ está contido em $Ker(g)$, segue que $h(m) = g(f(m)) = 0, \forall m \in M$, ou seja, $h = g \circ f = 0$. ■

Proposição 4.3. *Uma sequência é semi-exata se, e somente se, a composição de dois homomorfismos consecutivos é sempre igual ao homomorfismo trivial.*

Demonstração. $(\implies)$ Se a sequência é semi-exata, então $Im(f) \subset Ker(g)$ para quaisquer homomorfismos f e g consecutivos. Daí, pelo Lema 4.2, $h = g \circ f = 0$.

$(\impliedby)$ Se a composição de dois homomorfismos consecutivos é sempre igual ao homomorfismo trivial, tomando f e g homomorfismos consecutivos quaisquer, $h = g \circ f = 0$. Daí, pelo Lema 4.2, $Im(f) \subset Ker(g)$. Assim, como isso ocorre para todos os homomorfismos consecutivos do diagrama, trata-se de uma sequência semi-exata. ■

Proposição 4.4. *Toda sequência exata é semi-exata.*

Demonstração. Se uma sequência é exata, para quaisquer dois homomorfismos f e g consecutivos nesta ordem, $Im(f) = Ker(g)$ e portanto, $Im(f) \subset Ker(g)$. Assim, a sequência é semi-exata.

■

Observação 4.5. *Nem toda sequência semi-exata é exata. Um contraexemplo é apresentado a seguir.*

Consideremos f o R-homomorfismo que leva $n \in \mathbb{Z}$ em $6n$, e j a projeção canônica dos elementos de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_3$. A sequência definida por:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_3$$

é semi-exata, pois $Im(f) = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} = Ker(j)$, mas não é exata, pois $3 \in Ker(j)$ e $3 \notin Im(f)$.

Agora já é possível definir o que é um módulo derivado de uma sequência em um de seus módulos. Este recurso é muito utilizado no cálculo de uma homologia, que será definido na seção seguinte.

Definição 4.6. *Seja C uma sequência semi-exata de R-módulos e R-homomorfismos qualquer dada por*

$$\cdots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \cdots$$

Como $Im(f) \subset Ker(g)$, é possível obter o módulo quociente dado por $Ker(g)/Im(f)$. Este é o chamado ***módulo derivado da sequência C no módulo Y****.*

Proposição 4.7. *Uma sequência semi-exata de homomorfismos de R-Módulos é exata se, e somente se, todos os seus módulos derivados são triviais.*

Demonstração. $(\implies)$ Seja C uma sequência exata. Então, $Im(f) = Ker(g)$ para quaisquer dois homomorfismos f e g consecutivos.

Consideremos f e g homomorfismos de entrada e de saída de um R-módulo qualquer Y em C. Dessa forma, o módulo derivado da sequência C em Y é dado por

$$Ker(g)/Im(f) = Ker(g)/Ker(g) = \{\overline{0}\}.$$

Como Y é um R-módulo genérico da sequência, qualquer módulo derivado é trivial.

$(\impliedby)$ Se todos os módulos derivados da sequência semi-exata C são triviais, então para dois homomorfismos f e g consecutivos nesta ordem, $Ker(g)/Im(f) = \{\overline{0}\}$.

Como a sequência é semi-exata, tem-se que $Im(f) \subset Ker(g)$, resta apenas provar que $Ker(g) \subseteq Im(f)$.

Seja $x \in Ker(g)$. Então, $\overline{x} \in Ker(g)/Im(f)$ e daí, $\overline{x} = \overline{0}$. Assim,

$$x + Im(f) = 0 + Im(f) \implies x \in Im(f).$$

Logo, $Ker(g) \subseteq Im(f)$ e portanto, $Im(f) = Ker(g)$, e a sequência C é exata. ■

Observação 4.8. *O módulo derivado da sequência C no módulo Y também pode ser denotado da forma*

$$\frac{Ker(g)}{Im(f)}.$$

Vamos usar essa notação na próxima seção.

COMPLEXO DE CADEIAS E HOMOLOGIA

Os módulos de uma sequêcia semi-exata C são usualmente indexados por inteiros crescentes (como na seção anterior) ou por inteiros decrescentes.

Se inteiros decrescentes são usados como índices, a sequência semi-exata C é chamada **Complexo de Cadeias** (ou **Sequência Baixa**) e os homomorfismos em C, serão denotados pelo símbolo ∂ e indexados da mesma forma como nos módulos. Deste modo, um complexo de cadeia C é da seguinte forma:

$$C\colon \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

com $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ (ou seja, $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\partial_n)$), para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 5.1. *Considere o complexo de cadeias C dado por:*

$$C\colon \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

temos que:

i. *Os elementos de um módulo C_i são chamados de **cadeias i-dimensionais** enquanto os homomorfismos ∂_i são chamados **operadores bordo**;*

ii. *O conjunto $Ker(\partial_i)$ é denotado por $Z_i(C)$, e é chamado de **módulo i-dimensional de ciclos de C**;*

iii. *O conjunto $Im(\partial_{i+1})$ é denotado por $B_i(C)$, e é chamado de **módulo i-dimensional de bordos de C***

Observação 5.2. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, note que os conjuntos descritos acima estão todos contidos no módulo C_n, ou seja:*

$$Ker(\partial_n) = Z_n(C) \subseteq C_n \qquad Im(\partial_{n+1}) = B_n(C) \subseteq C_n$$

E como a sequência C é semi-exata, temos que $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\partial_n)$ e portanto, $B_n(C) \subset Z_n(C)$. Dessa forma, faz sentido definir o R-módulo quociente

$$H_n(C) = Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1}) = Z_n(C)/B_n(C).$$

Com estes conceitos, é possível finalmente definir a homologia de um Complexo de Cadeias.

Definição 5.3. *Seja C um complexo de cadeias qualquer. A família de R-módulos*

$$H_*(C) = \left\{ H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

é chamada de ***homologia do complexo de cadeias*** *C.*

Observação 5.4. *Observemos que, ao considerar C uma sequência exata, pela Proposição 4.7, como os módulos derivados são todos triviais, segue que as homologias $H_n(C) = \overline{0}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $H_*(C) = \{\overline{0}\}$.*

Exemplo 5.5. *Considere o complexo de cadeias*

$$C\colon C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} C_{-2}$$

em que C_1 e C_{-2} são os módulos triviais, $C_0 \subsetneq C_{-1}$, ∂_1 e ∂_{-1} são R-homomorfismos triviais, e ∂_0 é o R-homomorfismo inclusão. Dessa forma, temos que:

$$C\colon 0 \xrightarrow{0} C_0 \xrightarrow{i} C_{-1} \xrightarrow{0} 0$$

Para encontrarmos $H_*(C)$, basta calcularmos os módulos derivados da sequência C em C_0, e em C_{-1}.

Como $B_0(C) = Im(0) = \{0\}$ e $Z_0(C) = Ker(i) = \{n \mid i(n) = n = 0\} = \{0\}$, temos

$$H_0(C) = \frac{Z_0(C)}{B_0(C)} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{\overline{0}\}.$$

Em C_{-1}, temos $B_{-1}(C) = Im(i) = C_0$ e $Z_{-1}(C) = Ker(0) = C_{-1}$. Assim,

$$H_{-1}(C) = \frac{Z_{-1}(C)}{B_{-1}(C)} = \frac{C_{-1}}{C_0}.$$

Portanto, a homologia de C é dada por

$$H_*(C) = \{H_0(C), H_{-1}(C)\} = \left\{ \{\overline{0}\}, \frac{C_{-1}}{C_0} \right\}.$$

Observação 5.6. *Notemos que, os R-homomorfismos considerados no complexo de cadeias do Exemplo 5.5 não dependem diretamente de seus índices. No entanto, ao se trabalhar com diagramas indexados, tais como complexos de cadeias, os operadores bordo*

podem ser definidos de acordo com o índice que lhes é atribuído, assim como no Exemplo 5.7, em que os R-homomorfismos dependem da natureza par ou ímpar de seus índices.

Exemplo 5.7. *Sejam $R = \mathbb{R}$ e $C_n = \mathbb{R}^2$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

$$\partial_n(a,b) = \begin{cases} (a,0), & \text{se } n \text{ é par}, \\ (0,b), & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Se n é par, então $(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(a,b) = \partial_{n-1}(\partial_n(a,b)) = \partial_{n-1}(a,0) = (0,0)$.

Se n é ímpar, então $(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(a,b) = \partial_{n-1}(\partial_n(a,b)) = \partial_{n-1}(0,b) = (0,0)$.

Dessa forma, como a composição de quaisquer dois R-homomorfismos consecutivos resulta no homomorfismo trivial, pela Proposição 4.3, a sequência é semi-exata, e o diagrama

$$C\colon \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

é um complexo de cadeias.

Vamos calcular sua homologia. Para tal, vamos separar em casos:

1. $H_n(C)$, *quando n é par:*

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} = \frac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}$$

Notemos que, $Ker(\partial_n) = \{(0,b) |\ b \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}$, enquanto $Im(\partial_{n+1}) = \{(0,b) |\ b \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}$. Logo,

$$H_n(C) = \frac{\{0\} \times \mathbb{R}}{\{0\} \times \mathbb{R}} = \{\overline{0}\}.$$

2. $H_n(C)$, *quando n é ímpar:*

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} = \frac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}$$

Temos que, $Ker(\partial_n) = \{(a,0) |\ a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}$, enquanto $Im(\partial_{n+1}) = \{(0,b) |\ b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}$. Logo,

$$H_n(C) = \frac{\mathbb{R} \times \{0\}}{\mathbb{R} \times \{0\}} = \{\overline{0}\}$$

Portanto, $H_*(C) = \{\overline{0}\}$.

Exemplo 5.8. *Seja* C *um diagrama de* R*-módulos e* R*-homomorfismos da forma*

$$C\colon \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

onde $C_n = \begin{cases} \mathbb{R}, & \textit{se } n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & \textit{se } n \in \mathbb{Z}_-^*. \end{cases}$ *, enquanto* $\partial_n(x) = \begin{cases} id, & \textit{se } n \textit{ é par}, \\ 0, & \textit{se } n \textit{ é ímpar.} \end{cases}$

Dessa forma, temos que o diagrama C é da forma

$$C\colon \cdots \xrightarrow{\partial_4 = id} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_3 = 0} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_2 = id} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_1 = 0} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0 \cdots$$

Assim como no exemplo 5.7, verificamos de C é uma sequência semi-exata tomando dois R-homomorfismos consecutivos e mostrando que sua composição resulta no R-homomorfismo trivial:

Se n é par,

$$(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(x) = \partial_{n-1}(\partial_n(x)) = \partial_{n-1}(id(x)) = \partial_{n-1}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se n é ímpar,

$$(\partial_{n-1} \circ \partial_n)(x) = \partial_{n-1}(\partial_n(x)) = \partial_{n-1}(0) = id(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, C é um complexo de cadeias.

Por fim, calculemos a homologia deste complexo, isto é, $H_*(C)$. Para isso, vamos separar em dois casos:

1. Para $H_n(C)$ com $n \neq 0$, temos que

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} = \frac{Ker(\partial_n)}{Im(\partial_{n+1})}.$$

Dessa forma:

(a) Se n é par, $Ker(\partial_n) = \{x \in \mathbb{R} \mid \partial_n(x) = id(x) = x = 0\} = \{0\}$, enquanto $Im(\partial_{n+1}) = 0$. Assim,

$$H_n(C) = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{\overline{0}\}.$$

(b) Se n é ímpar, $Ker(\partial_n) = \{x \in \mathbb{R} \mid \partial_n(x) = 0\} = \mathbb{R}$, enquanto $Im(\partial_{n+1}) = \{id(x) = x | \ x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Portanto,

$$H_n(C) = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}} = \{\overline{0}\}.$$

2. Para $H_n(C)$ com $n = 0$, temos que

$$H_n(C) = H_0(C) = \frac{Z_0(C)}{B_0(C)} = \frac{Ker(\partial_0)}{Im(\partial_1)}.$$

Daí, como $Ker(\partial_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid \partial_0(x) = 0\} = \mathbb{R}$, e $Im(\partial_1) = \{0\}$,

$$H_n(C) = \frac{\mathbb{R}}{\{0\}} = \mathbb{R}.$$

Assim, encontramos que $H_*(C) = \begin{cases} \overline{0}, & \text{se } n \neq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{se } n = 0. \end{cases}$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados apresentados constituem parte dos estudos desenvolvidos no âmbito de uma iniciação científica, contribuindo para a compreensão de conceitos introdutórios de Álgebra Homológica e Topologia Algébrica. O estudo dos exemplos bem como as proposições e suas demonstrações, somado à elaboração de novos exemplos foram de extrema importância para a compreensão e aplicação da teoria.

Além disso, os conhecimentos abordados fornecem base teórica para o estudo de tópicos mais avançados, como homomorfismos induzidos e sequências exatas longas em homologia, que serão posteriormente desenvolvidos no projeto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora Francielle R. de Castro Coelho pelo auxílio prestado tanto no que diz respeito ao material estudado, quanto ao direcionamento acadêmico. Ademais, gostaria de agradecer à minha família, mas especialmente à minha irmã Karoline Porfírio Almeida pelo incentivo, e pelo exemplo pessoal que representa para mim. Na

condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço ao Programa de Educação Tutorial da SESU/MEC pelo fomento.

REFERÊNCIAS

[1] MILIES, F. C. P. **Anéis e Módulos**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1972.

[2] SANTOS, G. H. B. **Sequência exata longa em homologia**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

[3] HU, S.-T. **Introduction to Homological Algebra**. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1968.