A Função Gama de Euler

Laguna, Pedro Lascowski[1]
Damázio, Pedro Danizete[2]

Resumo: Este trabalho tem como objetivo principal estudar a função Gama de Euler, uma ferramenta fundamental da análise matemática que generaliza a função fatorial para números reais e complexos não inteiros. A pesquisa parte da definição da função Gama como uma integral imprópria e investiga suas propriedades mais relevantes, com destaque para a convexidade, a continuidade, a diferenciabilidade e, sobretudo, a log-convexidade.

Palavras-chave: Função Gama; Convexidade; Fatorial

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Já é de conhecimento da comunidade matemática que existe uma função que generaliza o fatorial e que ela pode ser expressa como uma integral imprópria. Mas a pergunta que fica é: quais são as propriedades que fazem essa função generalizar uma sequência que é definida por uma recorrência?

Definição: Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e defina $\varphi(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ e $\Psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\varphi(x_1,x_3)-\varphi(x_2,x_3)}{x_1-x_2}$ com $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$. Dizemos que f é *convexa* se, para todo $x_3 \in (a, b)$ fixado, $\varphi(x_1, x_2)$ é uma função não-decrescente de x_1.

Tem-se que $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2, x_1)$ e, por consequência, Ψ permuta seus elementos sem trocar o seu valor. Podemos pedir que

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

para que uma função seja convexa.

Suponha que $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ também é uma função convexa. Não é difícil ver que a função $f + g$ é também convexa.

De maneira mas geral, suponha que $\{f_n\}$ é uma sequência de funções convexas. Se

[1]Universidade Federal do Paraná (UFPR); Bacharelado em Matemática; pedro.laguna@ufpr.br.
[2]Universidade Federal do Paraná (UFPR); Professor Orientador; pddamazio@ufpr.br.

existe $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, sendo a convergência pontual ou uniforme, então f é convexa. Assim, conseguimos o seguinte teorema.

Proposição 1: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções reais definidas em (a, b) convexas. Então:

- Se $f_n \to f$, então f é convexa.
- Se $\sum f_n \to f$, então f é convexa.

Com esse resultado, conseguimos alguns outros teoremas que são consequência do Teorema de Rolle e do Teorema do Valor Médio.

Proposição 2: Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função, então f é convexa se, e somente se, f tem derivadas laterais não-decrescentes.

Corolário: Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo x em (a, b).

Ao escolhermos x_1, x_2 distintos e $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$, temos que o numerador de $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ é $(x_1 - x_2)(\frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) - f(x_3))$ com denominador positivo. Assim, para uma função convexa

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)).$$

Note que para o caso de $x_1 = x_2$, essa desigualdade é claramente satisfeita.
Ao aplicarmos indução, vemos que

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)).$$

Se f é uma função que satisfaz essa desigualdade, então dizemos que f é *fracamente convexa*.
O próximo teorema dá as condições para que uma função fracamente convexa seja convexa.

Proposição 3: Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função. Então f é convexa se, e somente se, f é contínua e fracamente convexa.

Definição: Dizemos que uma função f é *log-convexa* (ou *fracamente log-convexa* se ela é positiva e a função $\log f$ é convexa (ou fracamente convexa).
Pelos teoremas anteriores obtemos que:

Proposição 4: O produto de funções log-convexas é log-convexa e uma sequência convergente de funções log-convexas tem limite sendo uma função log-convexa.

Proposição 5: Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Se $f(x) > 0$ e $f(x)f''(x) - (f'(x))^2 \geq 0$ para todo x, f é log-convexa.

Com essas propriedades, conseguimos um resultado importante para o estudo da função Gama.

Proposição 6: Seja ϕ uma função contínua e positiva no interior do intervalo que define a integral, então

$$\int_a^b \phi(t)t^{x-1}dt$$

é uma função log-convexa de x em todo intervalo que a integral existir, sendo própria ou imprópria.

A partir disso, conseguimos estudar propriedades gerais da função Gama. As demonstrações dos resultados anteriores podem ser encontradas em [1].

RESULTADOS PRINCIPAIS

A função Gama e sua teoria foi desenvolvida em conexão com o problema de se generalizar o fatorial. Em busca de uma expressão que a defina, temos um resultado conhecido de uma integral imprópria:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!$$

Definimos a função $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ pela expressão

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Fica claro que para n inteiro positivo temos $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Teorema 1: A integral imprópria

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

converge para todo $x > 0$.

Demonstração: Separaremos a integral em duas parte, a primeira em $(0, 1]$ e a segunda de $[1, \infty)$. Para $0 < x \leq 1$, temos que $\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt < \int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x}$. Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos que a integral converge para $x > 0$.

Agora, basta conferir a convergência da integral no intervalo entre 1 e ∞. Como a série de Taylor de e^t converge uniformemente de maneira no intervalo $(1, \infty)$, temos que $e^t > \frac{t^n}{n!}$. Assim, $e^{-t} < \frac{n!}{t^n}$. Portanto, nesse intervalo, $e^{-t}t^{x-1} < \frac{n!}{t^{n+1-x}}$. Para x fixado, escolhemos $n > x + 1$, assim, $\int_1^\delta e^{-t}t^{x-1}dt < \int_1^\delta \frac{n!}{t^{n-x+1}}dt = \frac{n!}{n-x}\left(1 - \delta^{-(n-x)}\right) < \frac{n!}{n-x}$. Fazendo $\delta \to \infty$, temos que a integral converge. □

Agora que sabemos da convergência da integral que define Γ, podemos deduzir uma das propriedades mais importantes da função Γ.

Seja $x > 0$, temos que $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = (-e^{-t}t^x)\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} = 0 + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$. Indutivamente, podemos concluir que

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\ldots x\Gamma(x)$$

para todo inteiro positivo n.

Essa é uma propriedade muito útil, já que, se soubermos os valores de Γ em $(0, 1]$, então podemos calcular todos os seus valores em $(0, \infty)$ utilizando deste fato.

Com isso, podemos estender Γ para valores negativos. Se $-n < x < -(n-1)$, com n

sendo um inteiro positivo, definimos

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Note que Γ não fica em definida para os inteiros não-positivos.

Porém, será que o fato de $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ determina de maneira única essa extensão do fatorial?

Note que se f é bem definida em $(0,1]$ e é estendida com a propriedade de que $f(x+n) = (x+n-1)\dots xf(x)$ para valores positivos e $f(x) = \frac{f(x+n)}{x\dots(x+n-1)}$ para os negativos que não são inteiros e nem no 0.

Então, no que Γ se sobressai? Note que $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(n) = (n-1)!$. Além disso, veremos que Γ é contínua, diferenciável e log-convexa.

Utilizando este último fato, o qual decorre proposição 7, temos

Teorema 2: Se f é uma função que satisfaz:

- $f(x+1) = xf(x)$;
- O domínio de f contém $(0,\infty)$, e é log-convexa neste intervalo;
- $f(1) = 1$.

Então $f = \Gamma$.

Demonstração: Basta demonstrar a unicidade, já que Γ existe e satisfaz todas essas propriedades. Assim, se f satisfaz essas propriedades, então basta mostrar que $f(x) = \Gamma(x)$ para todo $x \in (0,1]$.

Sejam x, nesse intervalo, e $n \geq 2$ inteiro. Então, valem as desigualdades:

$$\frac{\log(n-1) - \log(f(n))}{(n-1)-n} \leq \frac{\log(f(x+n)) - \log(f(n))}{(x+n)-n} \leq \frac{\log(f(1+n) - \log(f(n))}{(1+n)-n}.$$

Com isso, e com o fato de que $f(n) = (n-1)!$, temos que $\log(n-1) \leq \frac{\log(f(x+n)) - \log((n-1)!)}{x} \leq \log(n)$. Ou ainda, $\log(n-1)^x(n-1)! \leq \log f(x+n) \leq \log(n^x(n-1)!)$. Logo,

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x\dots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!(x+n)}{x\dots(x+n)n}$$

.

Ao multiplicarmos a desigualdade da direita por $\frac{n}{x+n}$, obtemos $\frac{f(x)n}{x+n} \leq \frac{n^x n!}{x...(x+n)}$.
Fazendo $n \to \infty$, temos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x \dots (x+n)}$$

Porém, Γ satisfaz as mesmas propriedades. Logo, pela unicidade do limite

$$\Gamma(x) = f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x \dots (x+n)}$$

Dado que a expressão acima vale para todo $0 < x \leq 1$. Conseguimos a unicidade. $\square$
Denotamos a função dentro do limite por $\Gamma_n(x)$, satisfazendo as propriedades de que $\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x)\frac{n}{x+n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizando desse fato, conseguimos

$$\Gamma_n(x) = e^{x(\log n - (1+\dots\frac{1}{n})} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{e^x}{x+1} \cdot \dots \cdot \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$

Como $C = \lim_{n\to\infty}[1 + \dots + \frac{1}{n} - \log n]$, C sendo a constante de Euler-Mascheroni, obtemos

$$\Gamma(x) = e^{-Cx}\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$

Essa fórmula ficou conhecida como "Fórmula de Weiertrass". A partir dessa fórmula, conseguimos mostrar que Γ é diferenciável. Basta mostrar que $\log\Gamma$ é diferenciável.

$$\log\Gamma(x) = -Cx - \log x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n} - \log(1+\frac{x}{n})$$

Resta mostrar que a série em questão é uma função derivável, visto que $Cx - \log(x)$ são deriváveis. Derivando termo a termo formalmente, e utilizando o teorema da integração termo a termo, podemos ver que a função será diferenciável. Assim, como resultado da derivação da referida série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(x+n)}.$$

Pelo fato de $x > 0$, essa série convergirá uniformemente pelo teste de Weierstrass.

Logo

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right].$$

Logo,

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\left(-C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right]\right).$$

Repetindo o processo indutivamente, obtemos que

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(k-1)}{(x+n)^k}$$

para $k \geq 2$. Com $k = 2$, é possível observar que $|\Gamma|$ é convexa.

Além desses resultados, podemo utilizar a função Γ para calcular

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Sabendo que $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$ e definindo $f(x) = \Gamma(x+y)B(x,y)$ para y fixado, podemos ver que f satisfaz a primeira condição do teorema da unicidade da função Γ. Além disso, f é log-convexa, que nos dá a segunda condição do teorema. Uma vez que, $f(1) = \frac{1}{y}\Gamma(1+y) = \Gamma(y)$, podemos definir $g(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(y)}$, para obtermos

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y) \text{ para todo } x, y > 0.$$

E assim, se $x = y = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Além desse resultado, conseguimos obter muitos outros a partir da fórmula de Legendre.

Utilizando a Fórmula de Weierstrass, conseguimos escrever

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)}$$

em que $\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(x+n+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x+n})$, que, de certa maneira, pode ser escrita como $\mu(x) = \frac{\theta}{12x}$ para algum $\theta \in (0,1)$.

Isso nos garante que

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\Gamma(x)$$

para todo p inteiro positivo.

Cada uma dessas demonstrações pode ser encontrada em [1]. Além disso, as relações até aqui obtidas nos garantem uma outra equação que Γ satisfaz.

Teorema 3: Para $x\in(0,\infty)$, temos

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Demonstração: Supondo que $\varphi(x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x)$. Temos que a função φ não está definida para x inteiro. Pela relação de Legendre, e pela relação $\sin(\frac{\pi}{2}-\phi)=\cos(\phi)$ obtemos que

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=k\varphi(x)$$

em que k é uma constante real. Como $\sin$ e Γ são diferenciáveis, φ também tem essa propriedade. Além disso, $\varphi(x)=\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)(\pi-\frac{\pi^3x^2}{3!}+\frac{\pi^5x^4}{5!}-\ldots)$, que nos garante que podemos estender nossa função para valores inteiros em que o valor é 0. Não é difícil ver que φ é 1-periódica. Queremos mostrar que φ é constante. Denotando por g a segunda derivada de $\log\varphi$, vemos que $\frac{1}{4}(g(\frac{x}{2})+g(\frac{x+1}{2}))=g(x)$. Pela continuidade de g em $[0,1]$, temos que g é limitada nesse intervalo por uma constante M. Logo $|g(x)|\leq\frac{1}{4}|g(\frac{x}{2})|+\frac{1}{4}|g(\frac{x+1}{2})|\leq\frac{M}{2}$. Repetindo esse processo de maneira indutiva, pode-se mostrar que $|g|\leq\frac{M}{2^n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e, portanto, $g\equiv 0$. O que significa que $\log\varphi$ é uma função polinomial de primeiro grau.Como $\log\varphi$ é periódica, então ela é constante e igual $\log(\pi)$, completando a demonstração. □

Com essa fórmula, podemos escrever $\sin(\pi x)=\frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)}$ e, junto da fórmula de Weierstrass, temos

$$\sin(\pi x)=\pi x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Junto a esses resultados, pode-se mostrar que

$$\mu(x) = \int_0^\infty \frac{H(t)}{t+x} dt,$$

em que

$$H(t) = -2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} = \begin{cases} \frac{1}{2} - t, & t \in (0,1) \\ 0, & t = 0 \\ 1 - \text{periódica} \end{cases}$$

Assim, a função Gama satisfaz 3 equações funcionais

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1}$$

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{\Gamma(x)(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \tag{3}$$

Supondo que existe uma função f que satisfaz essas propriedades e, denotando por $\varphi = \frac{f}{\Gamma}$ e $g = \log(\varphi)$ nas demonstrações a seguir, conseguimos alguns resultados interessantes.

Teorema 4: A função Gama é a única solução das equações funcionais que é positiva para $x > 0$ e possui segunda derivada contínua.

Demonstração: Supondo que f é de classe C^2, então φ também é. Logo, pela demonstração da equação funcional (3), temos que φ deve ser constante, pois satisfaz $\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x)$, o que prova o Teorema. □

Teorema 5: A função Gama é a única solução das equações funcionais que é positiva para $x > 0$ e possui derivada contínua.

Demonstração: Note que $g = \log\varphi$ está bem definida e é contínua. Assim, para p inteiro positivo

$$g\left(\frac{x}{p}\right) + \cdots + g\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = g(x).$$

Derivando essa expressão, obtemos $\frac{1}{p}\left(g'\left(\frac{x}{p}\right) + \cdots + g'\left(\frac{x+p-1}{p}\right)\right) = g'(x)$. Fazendo

$p \to \infty$, temos que

$$\int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0) = 0$$

pois é 1-periódica pela demonstração de (3), o que significa que $g'(x) = 0$ para todo x. Logo, g é constante e, para satisfazer $g\left(\frac{x}{p}\right) + \cdots + g\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = g(x)$, deve ser nula, o que prova o teorema. □

Para o próximo teorema, precisamos de algumas propriedades das séries de Fourier.

A série de Fourier de uma função 1-periódica h é

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

em que $c_\nu = \int_0^1 h(x)e^{-2\pi i\nu x}dx$. Além disso, para $\alpha \in \mathbb{R}$ a série de Fourier de $h(x+\alpha)$ é $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} d_\nu e^{-2\pi i\nu x}$ com $d_\nu = e^{-2\pi i\nu x}c_\nu$. Para $k \geq 1$ é inteiro, a série de Fourier de $h(kx)$ é dada por $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} d_\nu e^{-2\pi i\nu kx} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu e^{-2\pi i\nu x}$ em que $\nu = k\mu$.

Teorema 6: A função Gama é a única função contínua e positiva para $x > 0$ que satisfaz as equações funcionais.

Demonstração: Sabemos que se h é contínua, então sua série de Fourier converge para $h(x_0)$ em x_0, como consequência do teorema de Fejér. Além disso,

$$g(x) + \cdots + g\left(x + \frac{p-1}{p}\right) = g(px),$$

então

$g(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$

$g\left(x + \frac{m}{p}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}e^{\frac{2\pi i\nu m}{p}}$

$g(px) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu e^{-2\pi i\nu x}$.

Logo, $\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}e^{\frac{2\pi i\nu m}{p}} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}\sum_{m=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i\nu m}{p}} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu e^{-2\pi i\nu x}$. Se ν é divisí-

vel por p, então o valor de $\sum_{m=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i\nu m}{p}}$ é p, se não, é 0. Logo, $g(px) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} pc_{\mu p}e^{-2\pi i\nu x}$, o que implica no fato de $c_\mu = pc_{\mu p} \implies c_p = \frac{c_1}{p}; c_{-p} = \frac{c_{-1}}{p}; c_0 = 0$. Logo,

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\frac{c_1}{\nu}e^{2\pi i\nu x} + \frac{c_{-1}}{\nu}e^{-2\pi ix}\right)$$

Pelo fato de que g é uma função real e $c_1 = -c_{-1}$, obtemos que $g \equiv 0$, o que prova o teorema. □

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os resultados obtidos neste trabalho, vemos que, de fato, a função Gama possui várias propriedades interessantes que podem ser utilizadas no cálculo. Além disso, essas mesmas propriedades justificam o porquê de ela ser uma generalização do fatorial, mesmo que existam outras funções que coincidam com ela nos inteiros positivos.

REFERÊNCIAS

[1] ARTIN, E. **The Gamma Function**. Mineola: Dover Publications, 2015.

[2] BOYCE, W. E. DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[3] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: volume 1, Funções de Uma Variável**. Rio de Janeiro: Impa, 2017.