Comparação de Abordagens de Diferenças Finitas para a Equação de Poisson Bidimensional

Pereira, Gabriel Melo Gomes[1]

Remigio, Santos Alberto Enriquez[2]

Resumo: Este trabalho compara três abordagens de diferenças finitas para o problema de Dirichlet da equação de Poisson bidimensional: a malha centrada nos vértices, que aplica a condição de contorno diretamente nos nós da fronteira, e a malha centrada em células, na qual a condição de contorno é tratada por pontos fantasmas usando extrapolação linear e quadrática. As três abordagens foram implementados com a mesma infraestrutura de malha, na qual a condição de contorno é tratada por pontos fantasmas, com valores estimados via extrapolação linear ou quadrática, *solver* e verificados pelo método das soluções manufaturadas em problemas-teste suaves, apresentando convergência de segunda ordem na norma L^∞. Também foi utilizado um problema-teste polinomial escolhido para anular exatamente o erro de truncamento no interior do estêncil de cinco pontos. Dessa forma, foi possível analisar separadamente a contribuição da fronteira e observar uma diferença de precisão que não aparecia nos demais problemas: o esquema de vértices fica limitado pelo erro de arredondamento de ponto flutuante, enquanto a extrapolação quadrática apresenta comportamento de $O(h^3)$ e a linear de $O(h^2)$. Os mapas de erro e os gráficos de convergência em escala log-log confirmam visualmente essa diferença, além da ordem global 2 observada nos problemas com soluções suaves.

Palavras-chave: Equação de Poisson; Diferenças finitas; Ponto fantasma; Método das soluções manufaturadas; Análise de convergência.

INTRODUÇÃO

A equação de Poisson, $-\Delta u = f$, é uma das equações diferenciais parciais mais importantes da matemática aplicada e aparece na modelagem de diferentes fenômenos estacionários, como o potencial eletrostático e a temperatura de equilíbrio em corpos condutores com fontes internas de calor. Por apresentar uma estrutura relativamente simples, também é muito utilizada como exemplo para introduzir e testar métodos numéricos para equações diferenciais parciais elípticas. Quando não é possível obter uma solução analítica fechada, métodos numéricos podem ser utilizados, entre eles o método das diferenças finitas, que se destaca pela sua simplicidade e facilidade de implementação.

Na literatura, duas abordagens de malha são bastante utilizadas para a discretiza-

[1]Universidade Federal de Uberlândia (UFU); Licenciatura em Matemática; gabriel.pereira3@ufu.br.
[2]Universidade Federal de Uberlândia (UFU); Instituto de Matemática e Estatística; santos.er@ufu.br.

ção de um domínio retangular: a malha nos vértices (*vertex-centered*) e a malha centrada em células (*cell-centered*). Nesta última, a condição de contorno de Dirichlet precisa ser incorporada por meio de pontos fantasmas, geralmente utilizando extrapolação linear ou quadrática [1]. O objetivo deste trabalho não é propor um novo esquema, mas implementar e comparar as três abordagens utilizando a mesma infraestrutura de malha e *solver*. Para isso, os métodos são verificados com o mesmo conjunto de problemas manufaturados [3], utilizando também a mesma metodologia de refinamento e a mesma norma de erro. Dessa forma, é possível comparar diretamente a ordem de convergência, o comportamento no regime pré-assintótico e o custo estrutural de cada abordagem para o tratamento da condição de contorno.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E ABORDAGENS NUMÉRICOS

Seja $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. O problema de Dirichlet consiste em encontrar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $-\Delta u = f$ em Ω e $u = g$ em $\partial\Omega$. Expandindo u em série de Taylor nas direções $\pm x$ e $\pm y$ e somando, obtém-se o clássico esquema de cinco pontos para o Laplaciano

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} = f_{i,j} + \tau_{i,j},$$

onde $\tau_{i,j}$ denota o erro de truncamento local. Aplicando novamente a expansão de Taylor, verifica-se que

$$\tau_{i,j} = -\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + O\left(h^4\right),$$

Na malha centrada em células, $x_i = (i - \frac{1}{2})h$, $y_j = (j - \frac{1}{2})h$, nenhum nó toca $\partial\Omega$, e o ponto fantasma u_g é obtido por extrapolação a partir de g e dos nós interiores mais próximos: $u_g = 2g - u_1$ (linear) e $u_g = \frac{8}{3}g - 2u_1 + \frac{1}{3}u_2$ (quadrática). Ambas preservam a ordem global 2, mas diferem na precisão local de fronteira: a linear é exata quando o coeficiente quadrático local de u se anula, e a quadrática, quando o coeficiente cúbico se anula – cada esquema reproduz exatamente polinômios até o grau da sua própria extrapolação. O esquema de vértices, por não extrapolar, reproduz u na fronteira a menos de erro de arredondamento.

A verificação segue o método das soluções manufaturadas (MMS) [3]: escolhe-se u_{exata} suave, calcula-se $f = -\Delta u_{\text{exata}}$ e usa-se $g = u_{\text{exata}}|_{\partial\Omega}$, comparando-se a solução nu-

mérica diretamente com u_{exata}. O erro é medido em $\|e_h\|_\infty = \max_{i,j} |u^{\text{num}}_{i,j} - u_{\text{exata}}(x_i, y_j)|$, e a ordem de convergência é estimada por $p \approx \log_2(\|e_h\|_\infty / \|e_{h/2}\|_\infty)$.

RESULTADOS NUMÉRICOS

As três abordagens foram comparados em três problemas manufaturados: o **Problema 1**, $u = x^3 + y^3$ ($f = -6(x + y)$), polinômio cúbico cuja quarta derivada nula anula o erro de truncamento interior do estêncil (1), isolando a precisão de fronteira; o **Problema 2**, $u = x(1 - x)y(1 - y)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$, suave e nulo em toda a fronteira ($g \equiv 0$); e o **Problema 3**, $u = e^x \cos(\pi y)$, $f = (\pi^2 - 1)e^x \cos(\pi y)$, com contorno não homogêneo e assimétrico.

COMPARAÇÃO CONSOLIDADA ENTRE OS TRÊS PROBLEMAS

A Tabela 1 apresenta, para a malha mais fina ($N = 256$, $h = 3{,}91 \times 10^{-3}$), os valores do erro $|e|_\infty$ e da ordem estimada p para as três abordagens em cada problema. Nos Problemas 2 e 3, que possuem fonte suave e condição de contorno homogênea ou não, as três abordagens apresentam ordem global de convergência 2 [1]. No Problema 3, porém, a extrapolação linear apresenta um erro absoluto maior, devido à condição de contorno não homogênea nas quatro arestas. No Problema 1, por outro lado, o erro de truncamento no interior é nulo por construção, o que permite observar uma diferença de precisão na fronteira que não aparece nos outros problemas. Nesse caso, o esquema dos vértices atinge o limite do ponto flutuante, enquanto a extrapolação quadrática converge com ordem $O(h^3)$ e a extrapolação linear com ordem $O(h^2)$.

Tabela 1 – Erro $\|e\|_\infty$ e ordem estimada p na malha mais fina ($N = 256$) para os três problemas-teste.

	Vértices		**Extrap. linear**		**Extrap. quadrática**	
Problema	$\|e\|_\infty$	p	$\|e\|_\infty$	p	$\|e\|_\infty$	p
P1: $x^3 + y^3$	$1{,}34 \times 10^{-13}$	–	$1{,}14 \times 10^{-5}$	2,00	$2{,}24 \times 10^{-8}$	3,00
P2: $x(1-x)y(1-y)\sin\sin$	$3{,}22 \times 10^{-6}$	2,00	$2{,}97 \times 10^{-6}$	1,99	$3{,}21 \times 10^{-6}$	1,99
P3: $e^x \cos(\pi y)$	$4{,}38 \times 10^{-6}$	2,00	$4{,}75 \times 10^{-5}$	1,95	$4{,}38 \times 10^{-6}$	2,00

TESTE POLINOMIAL: HIERARQUIA DE PRECISÃO NA FRONTEIRA

A Tabela 2 apresenta os resultados do Problema 1 para cada malha. Como o erro no interior se anula exatamente, o erro restante está relacionado apenas ao tratamento

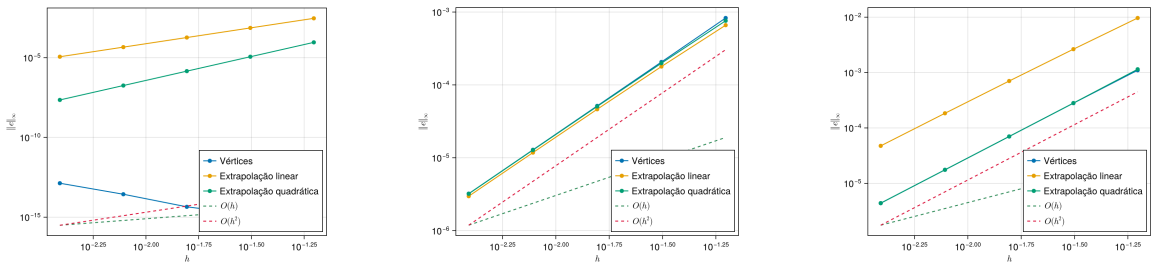
da fronteira. Com isso, fica mais clara a diferença entre as três abordagens: os vértices apresentam erro limitado pelo ponto flutuante, a extrapolação quadrática tem ordem $O(h^3)$ e a extrapolação linear tem ordem $O(h^2)$. Essa diferença não aparece de forma tão clara nos Problemas 2 e 3, apresentados na Tabela 1, pois nesses casos o erro interior é o principal responsável pelo erro total. A coluna referente à ordem do esquema de vértices foi omitida porque, nesse regime, ela representa apenas o comportamento do ruído numérico.

Tabela 2 – Erro $\|e\|_\infty$ e ordem estimada p para $u = x^3 + y^3$ (Problema 1, teste polinomial).

	Vértices		**Extrap. linear**		**Extrap. quadrática**	
h	$\|e\|_\infty$	p	$\|e\|_\infty$	p	$\|e\|_\infty$	p
$6{,}25 \times 10^{-2}$	$7{,}77 \times 10^{-16}$	–	$2{,}92 \times 10^{-3}$	–	$9{,}12 \times 10^{-5}$	–
$3{,}12 \times 10^{-2}$	$1{,}44 \times 10^{-15}$	–	$7{,}32 \times 10^{-4}$	2,00	$1{,}14 \times 10^{-5}$	3,00
$1{,}56 \times 10^{-2}$	$4{,}44 \times 10^{-15}$	–	$1{,}83 \times 10^{-4}$	2,00	$1{,}43 \times 10^{-6}$	3,00
$7{,}81 \times 10^{-3}$	$2{,}74 \times 10^{-14}$	–	$4{,}58 \times 10^{-5}$	2,00	$1{,}79 \times 10^{-7}$	3,00
$3{,}91 \times 10^{-3}$	$1{,}34 \times 10^{-13}$	–	$1{,}14 \times 10^{-5}$	2,00	$2{,}24 \times 10^{-8}$	3,00

CONVERGÊNCIA LOG-LOG

A Figura 1 mostra a convergência dos três problemas em escala log-log. Nos Problemas 2 e 3, apresentados nos painéis central e direito, as três curvas apresentam inclinações bastante semelhantes, o que está de acordo com a ordem global 2 indicada na Tabela 1. Já no Problema 1, mostrado no painel esquerdo, a diferença entre as três curvas fica mais clara. A curva dos vértices atinge o limite do erro de arredondamento de ponto flutuante, enquanto as curvas das extrapolações linear e quadrática continuam apresentando inclinações diferentes, correspondentes, respectivamente, a $O(h^2)$ e $O(h^3)$.



(a) – Problema 1 (b) – Problema 2 (c) – Problema 3

Figura 1 – Convergência em escala log-log de $\|e\|_\infty$ *versus* h para as três abordagens nos Problemas 1, 2 e 3 (esquerda para a direita).
Fonte: os próprios autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho implementou e comparou três abordagens de diferenças finitas para a equação de Poisson bidimensional com condição de contorno de Dirichlet, sob a mesma infraestrutura de malha e *solver*. Nos Problemas 2 e 3, as três abordagens convergem com a mesma ordem global 2 [1], ainda que a extrapolação linear exiba erro absoluto maior quando o contorno é não homogêneo nas quatro arestas (Problema 3). O Problema 1, ao anular o erro de truncamento interior, revelou uma hierarquia de precisão de fronteira mascarada nos demais: exata (ponto flutuante) para vértices, $O(h^3)$ para a extrapolação quadrática e $O(h^2)$ para a linear. Isso sugere que a escolha entre ghost linear e quadrático não deve depender apenas da ordem global, idêntica para fontes suaves, mas de quão dominante é o erro de fronteira frente ao erro interior no regime de malha empregado, relevante em problemas com fontes concentradas ou gradientes acentuados próximos à fronteira. Fica como trabalho futuro investigar essa hierarquia em fontes não polinomiais e ampliar a comparação a outros problemas-teste, como o harmônico $u = \sin(\pi x)\sinh(\pi y)$.

REFERÊNCIAS

LEVEQUE, R. J. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations**. Philadelphia: SIAM, 2007.

BARBEIRO, S. Supraconvergent cell-centered scheme for two dimensional elliptic problems. **Applied Numerical Mathematics**, v. 59, n. 1, p. 56-72, 2009.

ROACHE, P. J. Code verification by the method of manufactured solutions. **Journal of Fluids Engineering**, v. 124, n. 1, p. 4-10, 2002.