

O TEOREMA DA CONVERGÊNCIA MONÓTONA PARA AS INTEGRAIS DE RIEMANN E DE LEBESGUE

*João Alexandre Zambaldi Garcia
Universidade Estadual de Londrina
joao.zambaldig@uel.br*

*Professor Dr. Rodrigo Nunes Monteiro
Universidade Estadual de Londrina
monteirrorn@uel.br*

Resumo:

O Teorema da Convergência Monótona é um resultado clássico na teoria da integração de Lebesgue. Segue do fato que toda função Riemann integrável é também Lebesgue integrável e da coincidência dos valores de ambas as integrais que o resultado também vale para a integral de Riemann sob a hipótese do limite ser Riemann integrável. Apresentamos aqui uma demonstração deste resultado para a integral de Riemann usando calibres, uma ferramenta que foi desenvolvida na teoria de integração de Henstock-Kurzweil, e não faz uso da integral de Lebesgue.

Palavras-chave: Integração; convergência; medida; calibre.

1. Introdução

O conceito de integração, juntamente com os de função e continuidade, passou por profundas transformações nos séculos XVIII e XIX¹. Atualmente, é comum definir funções em termos da teoria dos conjuntos — que só se tornou disponível com Georg Cantor (1845-1918) na segunda metade do século XIX. Na época de Leonhard Euler (1707-1783), funções eram compreendidas apenas como expressões envolvendo operações usuais, como adição, multiplicação, extração de raízes, funções trigonométricas, exponenciais, etc.

A noção de continuidade também era diferente da atual, considerava-se uma função contínua quando era definida por uma única expressão desse tipo. Já as funções definidas por partes eram vistas como casos patológicos, descontínuos. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) percebeu que essa definição é inconsistente, pois a função módulo

¹Para uma descrição detalhada do desenvolvimento do conceito de função, ver (Monna, 1972) e para o desenvolvimento do conceito de integral, ver a primeira seção do primeiro capítulo de (Chae, 2012).

pode ser definida tanto por partes como numa única expressão $y = \sqrt{x^2}$. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Johann Dirichlet (1805-1859) e Bernhard Riemann (1826-1866) já entendiam funções e continuidade de maneira muito mais próxima da definição moderna, mas claro, ainda não da maneira conjuntista.

Naquela época, a definição predominante de integral definida de uma função em um intervalo era como a diferença dos valores de uma primitiva da função nos extremos do intervalo. Essa abordagem tinha a vantagem de evitar o uso dos polêmicos infinitésimos, que só foram formalizados, com a análise não padronizada, no século XX, mas, por outro lado, ocultava o caráter geométrico da integral e tornava difícil justificar métodos de aproximação numérica.

Cauchy também propôs uma definição de integral para funções contínuas, independente da noção de derivada, que lhe permitiu demonstrar o Teorema do Valor Médio para integrais e, a partir dele, os Teoremas Fundamentais do Cálculo. Posteriormente, Dirichlet estendeu essa definição, permitindo a integração de funções que apresentam descontinuidades em certos conjuntos "esparcos" que podem ser infinitos, mas não são densos no domínio. Essa generalização possibilitou a integração de funções descontínuas em conjuntos maiores, mas era ainda bem restritiva.

Em seu famoso artigo de 1854, tratando da representabilidade de funções por séries trigonométricas (Riemann, 2004), Riemann generaliza a integral de Cauchy em outra direção, obtendo uma integral mais geral tanto que a de Cauchy quanto a extensão de Dirichlet. Neste mesmo artigo, Riemann apresenta um exemplo de uma função que é Riemann integrável que é descontínua em um subconjunto denso do seu domínio. Mais tarde, as funções Riemann integráveis foram caracterizadas como as funções cujo conjunto de pontos de descontinuidade tem medida nula.

Em sua tese (Lebesgue, 1902), Henri Lebesgue (1875-1941) introduz a definição da integral que conhecemos hoje como integral de Lebesgue, e que ele chamava de integral geométrica, baseada na teoria da medida que vinha sendo desenvolvida por Émile Borel (1871-1956). Essa integral, definida de forma totalmente independente a integral de Riemann, amplia enormemente a classe das funções integráveis e permite resultados como o Teorema da Convergência Monótona, o Teorema de Beppo Levi, o Lema de Fatou, e o Teorema da Convergência Dominada. Estes mesmos teoremas valem também a integral de Riemann sob a hipótese adicional (necessária e suficiente) de que a sequência de funções convirja para uma função Riemann integrável.

Uma nova abordagem à integração foi desenvolvida por Jaroslav Kurzweil (1926-2022) e Ralph Henstock (1923-2007) por volta de 1960. Essa integral, conhecida como

integral de Henstock-Kurzweil, integral de gauge ou integral de Riemann generalizada² é baseada na integral de Riemann e substitui o critério usual de refinamento de partições usando a norma pela noção mais flexível de calibre — uma função que determina, ponto a ponto, o grau de refinamento exigido da partição. No caso de funções reais definidas em intervalos compactos, essa integral consegue integrar todas as funções Lebesgue integráveis e ainda algumas que não são integráveis no sentido de Lebesgue.

Nesse trabalho, exploramos o Teorema da Convergência Dominada para integral de Riemann e para a integral de Lebesgue. Veremos como técnicas que surgem na teoria da integração de Henstock-Kurzweil podem ser aplicadas na teoria de integração de Riemann.

2. Teorema da Convergência Monótona para integral de Lebesgue

Iniciamos apresentando uma demonstração bem conhecida do Teorema da Convergência Monótona no contexto da integral de Lebesgue. Essa demonstração pode ser encontrada em diversos textos clássicos de Análise Real, como (Rudin, 1987) e (Folland, 1999).

Teorema da Convergência Monótona. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}$ uma sequência monótona não decrescente de funções mensuráveis $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ com limite pontual $f = \lim f_n$. Então, vale que:

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Demonstração. Como $\{f_n\}$ é uma sequência não decrescente, $f = \sup f_n$ e $f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelas propriedades da integral de Lebesgue, temos $\int f_n \leq \int f$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Quando $n \rightarrow \infty$, pela preservação de sinal, obtemos a desigualdade $\lim \int f_n \leq \int f$.

Considere $\psi : X \rightarrow [0, +\infty]$ uma função simples mensurável que satisfaz a desigualdade $0 \leq \psi \leq f$, um número $\alpha \in (0, 1)$, a princípio, fixo e os definimos os conjuntos $E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\psi(x)\}$. A monotonicidade da sequência $\{f_n\}$ é transferida para a sequência de conjuntos, no sentido que $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$ e vale também que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Assim, vale que

$$\int_{E_n} \alpha\psi \leq \int_{E_n} f_n \leq \int f_n.$$

Lembrando que a aplicação associando cada conjunto $A \in \mathcal{M}$ a integral $\int_A \psi$ é uma

²Para uma introdução rápida, ver (Bartle, Robert G, 1996).

medida em $(X, \mathcal{M})$, temos pela continuidade da medida a seguinte relação:

$$\lim \int_{E_n} \alpha \psi = \lim \alpha \int_{E_n} \psi = \alpha \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} \psi = \int \psi.$$

Com isso, quando fazemos $n \rightarrow \infty$ na última desigualdade, temos pela preservação de sinal a seguinte desigualdade

$$\alpha \int \psi \leq \lim \int f_n$$

Fazendo $\alpha \rightarrow 1$, também pela preservação de sinal, obtemos $\int \psi \leq \lim \int f_n$. Como a relação vale para qualquer função mensurável $0 \leq \psi \leq f$ o valor $\lim \int f_n$ é uma cota superior para os valores $\int \psi$ para ψ nestas condições, por definição $\int f$ é o supremo desses valores, segue que $\int f \leq \lim \int f_n$. $\square$

3. Contraexemplo para integral de Riemann, calibres e uma versão do Teorema de Saks-Henstock para a integral de Riemann

Primeiramente, verificamos que uma sequência monótona de funções Riemann integráveis pode convergir pontualmente para uma função que não é Riemann integrável.

Exemplo. Para cada n natural considere E_n o conjunto dos números racionais do intervalo $[0, 1]$ que podem ser escritos como uma fração de números inteiros em que o módulo do denominador não excede n e f_n a restrição de χ_{E_n} para o intervalo $[0, 1]$. Desta forma, a sequência $\{f_n\}$ é uma sequência monótona de funções que tem um número finito de descontinuidades, e portanto são Riemann integráveis, convergindo pontualmente para $f = \chi_{\mathbb{Q}}|_{[0, 1]}$. Como para qualquer partição P de $[0, 1]$ a integral de Darboux inferior de f é $L(f; P) = 0$ e a integral de Darboux superior de f é $U(f; P) = 1$, concluímos que f não é Riemann integrável.

A função de Dirichlet é possivelmente o exemplo mais bem conhecido de uma função que não é Riemann integrável. Intuitivamente isso ocorre pois $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são densos e mapeados por $\chi_{\mathbb{Q}}$ a valores distintos. A teoria de Lebesgue resolve este problema entendendo que a medida de $\mathbb{Q}$ é nula enquanto a teoria de Henstock-Kurzweil usa os calibres para codificar a "insignificância" de $\mathbb{Q}$.

Definição.

1. Um calibre num intervalo $[a, b]$ é uma aplicação $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$.
2. Seja $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição pontilhada de $[a, b]$. Dizemos que P é δ -fina se $x_i - x_{i-1} < \delta(t_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

É interessante observar que um número $\delta_0 > 0$ tem o calibre constante $\delta(x) = \delta_0$ como correspondente natural. Desta forma, uma partição pontilhada é mais fina que δ se, e somente se, $|P| < \delta_0$. Com essa observação em mente, definimos a integral de Henstock-Kurzweil.

Definição. Dizemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Henstock-Kurzweil integrável se existir um número real I tal que para todo $\varepsilon > 0$ existir um calibre δ definido em $[a, b]$ para que $|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I| < \varepsilon$ para qualquer partição pontilhada δ -fina $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$. Neste caso, dizemos que I é a integral de Henstock-Kurzweil de f e escrevemos $\int^* f = I$.

Note que se restringíssemos essa definição aos calibres constantes, teríamos uma integral equivalente a integral de Riemann. Isto implica que toda função Riemann integrável $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é também Henstock-Kurzweil integrável e $\int f = \int^* f$.

Exemplo. A função de Dirichlet é Henstock-Kurzweil integrável no intervalo $[0, 1]$. Além disso, colocando $f = \chi_{\mathbb{Q}}|_{[0, 1]}$, temos $\int^* f = 0$.

Demonstração. Considere $\varepsilon > 0$ e uma bijeção $\psi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$. Com isso, construímos um calibre $\delta : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ pela relação

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \\ 2^{-\psi(x)}\varepsilon & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Deste modo, se $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ é uma partição pontilhada δ -fina. Considerando $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ o subconjunto dos índices i tais que $t_i \in \mathbb{Q}$, temos que

$$0 \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \in I} \delta(t_i) < \sum_{r \in \mathbb{Q}} \delta(r) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon.$$

Segue que f é Henstock-Kurzweil integrável e $\int^* f = 0$. □

Uma questão natural que surge quando começamos a trabalhar com calibres é a seguinte: dado um calibre $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ é sempre possível encontrar uma partição δ -fina? O Teorema de Cousin ou Lema de Cousin, em homenagem ao matemático francês Pierre Cousin (1867-1933), responde esta pergunta de forma afirmativa.

Teorema de Cousin. Para qualquer calibre $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ existe uma partição pontilhada δ -fina.

Demonstração. Primeiramente, observamos que para que um calibre $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ não admita partição pontilhada δ -fina é necessário que para qualquer $c \in (a, b)$ ou $[a, c]$ não

admite partição pontilhada $\delta|[a, c]$ -fina ou $[c, b]$ não admite partição pontilhada $\delta|[c, b]$ -fina. Com o objetivo de chegar a uma contradição, digamos que $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ é um calibre que não admite uma partição δ -fina. Usaremos isso para construir uma sequência de intervalos encaixantes por recursão. Colocamos $[a_1, b_1] = [a, b]$ e supomos que já foram definidos $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ de modo que $[a_k, b_k]$ não admite partição $\delta|[a_k, b_k]$ -fina para todo $k = 1, \dots, n$ e $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}$ para todo $k = 1, \dots, n - 1$. Para definir $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ consideramos $c = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Caso $\delta|[a_n, c]$ não admitir partição $\delta|[a_n, c]$ -fina, colocamos $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c$. Caso contrário, colocamos $a_{n+1} = c$ e $b_{n+1} = b_n$. Assim, temos $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$, em que nenhum intervalo $[a_n, b_n]$ admite partição $\delta|[a_n, b_n]$ -fina e $b_n - a_n = 2^{1-n}(b - a)$. Pelo Teorema da Interseção de Cantor, existe $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. O fato termos $c \in [a_n, b_n]$ e $[a_n, b_n]$ não admitir partição $\delta|[a_n, b_n]$ -fina, implica que $0 \leq \delta(c) \leq b_n - a_n = 2^{1-n}(b - a)$. Deste modo, segue do Teorema do Confronto que $\delta(c) = 0$. Uma contradição. $\square$

O próximo resultado que precisaremos é uma adaptação do Teorema de Saks-Henstock para a integral de Riemann. Esse resultado é importante na teoria da integração de Henstock-Kurzweil em que ele pode ser usado para demonstrar o Teorema da Convergência Monótona, como é feito em (Bartle, Robert Gardner, 2001). Antes de enuncia-lo, faremos um breve comentário sobre subpartições e relembremos o Critério de Riemann que será usado na demonstração.

Definição. Uma subpartição de um intervalo $[a, b]$ é uma família finita $P = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i \in I}$ em que os interiores dos intervalos $[u_i, v_i]$ são disjuntos e $t_i \in [u_i, v_i]$ para todo $i \in I$. Definimos a norma da subpartição como $|P| = \max |u_i - v_i|$. Além disso, para um calibre $\delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$, diremos que a subpartição é δ -fina se tivermos que $v_i - u_i < \delta(t_i)$ para todo $i \in I$.

Critério de Riemann. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Riemann integrável. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer partição pontilhada $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ com $|P| < \delta$, tem-se

$$\sum_{i=1}^n \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

em que, para qualquer subconjunto não vazio $E \subseteq [a, b]$, o número $\omega(f; E)$ é a oscilação de f em E , ou seja:

$$\omega(f; E) = \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

*Teorema de Saks-Henstock*³ (para a integral de Riemann). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Riemann integrável. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer subpartição pontilhada $Q = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i \in J}$ de $[a, b]$ com $|P| < \delta$ tem-se que

$$\sum_{i \in J} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Demonstração. Por f ser Riemann integrável, existe uma $\delta > 0$ tal que toda partição pontilhada $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i \in I}$ com $|P| < \delta$ tem-se que

$$\sum_{i \in I} \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Desta forma, considere $Q = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i \in J}$ uma subpartição pontilhada de $[a, b]$ com $|Q| < \delta$ e $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i \in I}$ uma partição pontilhada de $[a, b]$ que contém Q , isto é $J \subseteq I$ e $[u_i, v_i] = [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i \in J$. Desta forma

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| &= \sum_{i \in I} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f - f(t_i)] \right| \\ &\leq \sum_{i \in I} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f - f(t_i)| \\ &\leq \sum_{i \in I} \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i \in J} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i \in I} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f - f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

□

4. Teorema da Convergência Monótona para integral de Riemann

Embora seja possível demonstrar o Teorema da Convergência Monótona para a integral de Riemann (sob a hipótese adicional de que a função limite seja Riemann-integrável) utilizando a teoria da integral de Lebesgue, essa abordagem exigiria o desenvolvimento prévio de todo o ferramental de medida e integração de Lebesgue. A demonstração que apresentaremos aqui, devida a Brian S. Thomson (Thomson, 2010), usa apenas o Teorema de Cousin e a versão do Teorema de Saks-Henstock para a integral de Riemann. Outra

³Saks em memória do matemático polonês Stanisław Saks (1897–1942).

demonstração interessante, e um pouco mais curta, usando calibres e a caracterização de Lebesgue das funções Riemann integráveis pode ser encontrada em (Niculescu; Popovici, 2011).

Teorema da Convergência Monótona (para integral de Riemann). Considere $\{f_n\}$ uma sequência de não decrescente de funções Riemann integráveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convergido pontualmente para função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é Riemann integrável, então

$$\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n.$$

Demonstração. Será suficiente provar que para as funções $g_n = f - f_n$ temos que $\lim \int_a^b g_n = 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Como cada g_n é Riemann integrável, pelo Teorema de Saks-Henstock, para cada n , existe $\delta_n > 0$ pequeno o suficiente para que toda subpartição pontilhada $P = \{([u_i, v_i], t_i)\}_{i \in I}$ com $|P| < \delta_n$ satisfaça

$$\sum_{i \in I} \left| \int_{u_i}^{v_i} g_n - g_n(t_i)(v_i - u_i) \right| < \frac{2^{-n}\varepsilon}{b-a+1}.$$

Para construirmos um calibre, associe a cada $x \in [a, b]$ um número natural $N(x)$ de modo que $g_n(x) < \frac{\varepsilon}{b-a+1}$ sempre que $n > N(x)$. E com isso, definimos um calibre δ em $[a, b]$ por $\delta(x) = \delta_{N(x)}$ para todo $a \leq x \leq b$. Sendo $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i \in I}$ uma partição pontilhada δ -fina, colocamos $N = \max_{i \in I} N(t_i)$ e particionamos o nosso conjunto de índices nos subconjuntos disjuntos $I_j = \{i \in I : N(t_i) = j\}$ para $j = 1, \dots, N$.

Para cada $j \in \{1, \dots, N\}$, a subpartição $Q_j = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i \in I_j}$ é δ_j -fina uma vez que $x_i - x_{i-1} < \delta(t_i) = \delta_{N(t_i)} = \delta_j$ para todo $i \in I_j$. Assim, segue da inequação que obtivemos pelo Teorema de Saks-Henstock, que

$$\sum_{i \in I_j} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_j - g_j(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \frac{2^{-j}\varepsilon}{b-a+1}.$$

E isso implica que

$$\sum_{i \in I_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_j \leq \frac{2^{-j}}{b-a+1} + \sum_{i \in I_j} g_n(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Com essa desigualdade, estamos prontos para mostrar que $\lim \int_a^b g_n = 0$. Com

efeito, se $n > N$, temos

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_a^b g_n \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{i \in I_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_n \\
 &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i \in I_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_j \\
 &\leq \sum_{j=1}^N \left[\frac{2^{-j}\varepsilon}{b-a+1} + \sum_{i \in I_j} g_j(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right] \\
 &= \frac{\varepsilon}{b-a+1} \sum_{j=1}^n 2^{-j} + \sum_{j=1}^N \sum_{i \in I_j} g_j(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{b-a+1} + (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a+1} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
 \lim \int_a^b f_n &= \lim \int (f - g_n) \\
 &= \int f - \lim \int g_n \\
 &= \int f.
 \end{aligned}$$

□

5. Resultados da Pesquisa (Parciais ou Finais)

Neste trabalho, estudamos o Teorema da Convergência Monótona, um teorema clássico, geralmente trabalhado no contexto da teoria de integração de Lebesgue. Vimos que o teorema também é válido para a integral de Riemann, desde que a função limite da sequência seja Riemann integrável. Essa abordagem permite conectar as três principais teorias de integração: a de Riemann, a de Lebesgue e a de Henstock-Kurzweil, evidenciando como os calibres podem ser aplicados mesmo fora da teoria da integração de Henstock-Kurzweil.

Referências

BARTLE, Robert G. Return to the Riemann integral. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 103, n. 8, p. 625–632, 1996.

BARTLE, Robert Gardner. **A modern theory of integration**. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, 2001. v. 32.

CHAE, Soo B. **Lebesgue integration**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

FOLLAND, Gerald B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999.

LEBESGUE, Henri. Intégrale, longueur, aire. **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1898-1922)**, Springer, v. 7, n. 1, p. 231–359, 1902.

MONNA, A. F. The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. **Archive for History of Exact Sciences**, Springer, v. 9, n. 1, p. 57–84, 1972. ISSN 00039519, 14320657.
Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/41133350>. Acesso em: 5 jul. 2025.

NICULESCU, Constantin P; POPOVICI, Florin. The monotone convergence theorem for the Riemann integral. **Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series**, v. 38, n. 2, p. 55–58, 2011.

RIEMANN, Bernhard. On the Representation of a Function by a Trigonometric Series. In: BERNHARD Riemann: Collected Works. [S.l.]: Kendrick Press, 2004. Trabalho original de 1854, publicado postumamente em 1867. Tradução em inglês.

RUDIN, Walter. **Real and complex analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1987.

THOMSON, Brian S. Monotone convergence theorem for the Riemann integral. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 117, n. 6, p. 547–550, 2010.