

GENERALIZAÇÕES DE ALGUNS TEOREMAS DA ANÁLISE REAL PARA FUNÇÕES COM DERIVADAS LATERAIS

Victor Lucas Batista de Avila
Universidade Estadual de Londrina
victor.deavila@uel.br

Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro
Universidade Estadual de Londrina
monteiorn@uel.br

Resumo:

Neste trabalho, apresentamos generalizações de teoremas clássicos, como o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio de Lagrange, para o contexto de funções que possuem derivadas laterais (à direita e à esquerda), mas que não são necessariamente deriváveis no sentido usual.

Palavras-chave: Derivadas laterais; Funções deriváveis; Teorema de Rolle; Teorema do Valor Médio.

1. Introdução

A Análise é uma área fundamental da Matemática que, entre outros temas, estuda as propriedades das funções e fornece ferramentas para compreender seu comportamento. Dentro dessa área, teoremas importantes, como os Teoremas de Rolle e de Lagrange, desempenham um papel essencial, ao estabelecerem relações entre a derivada de uma função e seu comportamento ao longo de um intervalo.

Entretanto, em muitos contextos práticos e teóricos, surge a necessidade de trabalhar com funções que não são deriváveis no sentido clássico, mas que admitem derivadas laterais, isto é, derivadas à direita e à esquerda. Esse tipo de função aparece naturalmente em problemas envolvendo funções definidas por partes ou em fenômenos com descontinuidades.

Motivados por esses cenários, nosso objetivo neste trabalho é apresentar formas mais gerais de alguns teoremas clássicos da Análise Real, válidas para funções que possuem apenas derivadas laterais. De forma precisa, apresentamos generalizações dos seguintes resultados:

Teorema 1.1 (Teorema de Rolle). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = 0.$$

Teorema 1.2 (Teorema do Valor Médio de Lagrange). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 1.3 (Teorema do Valor Médio de Cauchy). *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Se f e g são deriváveis em (a, b) , $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ e $g(a) \neq g(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Esses resultados, bem como suas demonstrações, podem ser encontrados em Lima (2007).

2. Algumas Generalizações

O primeiro tópico a ser abordado serão as generalizações dos Teoremas de Rolle, do Valor Médio de Lagrange e do Valor Médio de Cauchy, todas desenvolvidas em Kubik (1962). Essas generalizações são as seguintes:

Este primeiro resultado é uma generalização do Teorema de Rolle, em que a hipótese da função ser derivável é substituída pela hipótese de ser derivável à esquerda e à direita.

Teorema 2.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável à direita e à esquerda em (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'_+(c)f'_-(c) \leq 0$*

Demonstração. Primeiro, consideremos o caso em que $f(a) = f(b) = 0$. Se f for identicamente nula, então f' também é, logo qualquer $x \in (a, b)$ pode ser tomado como o ponto c . Agora, vamos assumir que $f \neq 0$. Assim, existe um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Como $f(a) = f(b) = 0$ podemos concluir que $x_0 \in (a, b)$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $f(x_0) > 0$. Pelo Teorema de Weierstrass temos que f assume um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$. Seja M o valor máximo de f em $[a, b]$. Como $f(x_0) > 0$ e $f(x_0) \leq M$, então $M > 0$. seja $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = M$. Dado que $f(a) = f(b) = 0$ e $M > 0$, temos que $c \in (a, b)$. Assim, para todo $h > 0$,

$h \in \mathbb{R}$, temos $f(c - h) \leq f(c)$ e $f(c + h) \leq f(c)$. Logo

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow f'_+(c) \leq 0,$$

$$\frac{f(c) - f(c - h)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c) - f(c - h)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'_-(c) \geq 0.$$

Sendo assim, $f'_+(c)f'_-(c) \leq 0$. Agora, caso $f(a) = f(b) \neq 0$, basta definirmos a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - f(a).$$

Deste modo, temos que g é contínua em $[a, b]$ e possui suas duas derivadas laterais em (a, b) . Além disso, temos que $g(a) = g(b) = 0$. Pelo caso anterior, podemos garantir que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'_+(c)g'_-(c) \leq 0$. Note que $g'_+(c) = f'_+(c)$ e $g'_-(c) = f'_-(c)$. Logo

$$g'_+(c)g'_-(c) \leq 0 \Rightarrow f'_+(c)f'_-(c) \leq 0.$$

O teorema está, portanto, demonstrado. □

Observação 2.2. Observe que se a função do Teorema 2.1 for derivável, ou seja, se suas derivadas laterais são necessariamente iguais, então o teorema se reduz ao Teorema de Rolle usual (Teorema 1.1).

O próximo resultado é uma generalização do Teorema do Valor Médio de Lagrange, onde a hipótese de diferenciabilidade é substituída pela hipótese de diferenciabilidade unilateral.

Teorema 2.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável à esquerda e à direita em (a, b) . Existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que:*

$$\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'_+(c) \right) \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'_-(c) \right) \leq 0.$$

Demonstração. Definamos a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(a) - f(x) + (x - a) \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

Como g é composta por somas e produtos de funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis à esquerda e à direita em (a, b) , temos que g é contínua em $[a, b]$ e possui suas duas

derivadas laterais em (a, b) , sendo

$$g'_+(x) = -f'_+(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ e } g'_-(x) = -f'_-(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Além disso, note que

$$g(a) = f(a) - f(a) + (a - a) \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) = 0$$

e

$$g(b) = f(a) - f(b) + (b - a) \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) = 0.$$

Desta forma, g satisfaz as hipóteses do Teorema 1, logo existe $c \in (a, b)$ tal que $g'_+(c)g'_-(c) \leq 0$, ou seja

$$\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'_+(c) \right) \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'_-(c) \right) \leq 0.$$

□

Observação 2.4. A interpretação geométrica do Teorema 2 seria que para uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições de ser contínua em $[a, b]$ e possuir suas duas derivadas laterais em (a, b) , existirá um ponto $c \in (a, b)$ tal que a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ será mais inclinada que a reta tangente à direita no ponto $(c, f(c))$ e menos inclinada que a tangente à esquerda em $(c, f(c))$, ou vice-versa.

Observação 2.5. Note que se a função f do teorema anterior for derivável, ou seja, se suas derivadas laterais são iguais, então o teorema se reduz ao Teorema do Valor Médio de Lagrange usual (Teorema 1.2).

O próximo resultado é uma generalização do Teorema do Valor Médio de Cauchy, onde a hipótese de diferenciabilidade é substituída pela hipótese de diferenciabilidade unilateral e é retirada a hipótese de que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Mais precisamente, g não é necessariamente derivável, mesmo assim suas derivadas laterais não são necessariamente não nulas em todos os pontos do intervalo (a, b) .

Teorema 2.6. *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis à esquerda e à direita em (a, b) , com $g(a) \neq g(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que:*

$$\left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'_+(c) - f'_+(c) \right) \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'_-(c) - f'_-(c) \right) \leq 0.$$

Demonstração. Definamos a função $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = f(a) - f(x) + [g(x) - g(a)] \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Note que esta função satisfaz as hipóteses do Teorema 1, ou seja, é contínua em $[a, b]$, derivável à esquerda e à direita em (a, b) e $\varphi(a) = \varphi(b)$. Desta forma, existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'_+(c)\varphi'_-(c) \leq 0$. Observe que

$$\varphi'_+(c) = 0 - f'_+(c) + [g'_+(c) - 0] \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = -f'_+(c) + g'_+(c) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

e

$$\varphi'_-(c) = 0 - f'_-(c) + [g'_-(c) - 0] \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = -f'_-(c) + g'_-(c) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Portanto, segue que

$$\left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'_+(c) - f'_+(c) \right) \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'_-(c) - f'_-(c) \right) \leq 0.$$

□

Observação 2.7. Observe que se as funções f, g do teorema anterior são deriváveis, e se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ então o teorema se reduz ao Teorema do Valor Médio de Cauchy usual.

O segundo tópico a ser abordado serão outras generalizações dos Teoremas de Rolle, do Valor Médio de Lagrange e do Valor Médio de Cauchy, as quais foram desenvolvidas em Karamata (1951). Essas generalizações são as seguintes:

O resultado a seguir é uma generalização do Teorema do Valor Médio de Lagrange, onde a hipótese de diferenciabilidade é substituída pela hipótese de diferenciabilidade unilateral.

Teorema 2.8. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Se f for derivável à esquerda e à direita em (a, b) , então existem $c \in (a, b)$ e $p, q \in \mathbb{R}_+$, com $p + q = 1$, tais que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = pf'_+(c) + qf'_-(c).$$

Demonstração. Para facilitar a escrita, façamos

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q.$$

Definamos $a', b' \in (a, b)$ por $a' = a + h$ e $b' = a + 2h$, sendo $h = \frac{b-a}{3}$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} Q &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(b') + f(b') - f(a') + f(a') - f(a)}{b - a} \\ &= \frac{f(b) - f(b')}{b - a} + \frac{f(b') - f(a')}{b - a} + \frac{f(a') - f(a)}{b - a} \\ &= \frac{f(b) - f(b')}{3h} + \frac{f(b') - f(a')}{3h} + \frac{f(a') - f(a)}{3h} \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{f(b) - f(b')}{h} + \frac{f(b') - f(a')}{h} + \frac{f(a') - f(a)}{h} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{f(b) - f(b')}{b - b'} + \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} + \frac{f(a') - f(a)}{a' - a} \right]. \end{aligned}$$

Definamos $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Desta forma, temos que

$$Q = \frac{1}{3}[\varphi(b') + \varphi(a') + \varphi(a)].$$

Suponha que $\varphi(b'), \varphi(a'), \varphi(a) < Q$. Desta forma, temos

$$\frac{\varphi(b') + \varphi(a') + \varphi(a)}{3} < Q.$$

O que é um absurdo, logo um dos três deve ser maior ou igual a Q . Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi(a') \geq Q$. Caso $\varphi(a') = Q$, definamos $a_1 = a'$ e $b_1 = a_1 + h = a' + h = b'$. Desta forma, temos que $[a_1, b_1] \subsetneq [a, b]$. Além disso, $b_1 - a_1 = h = \frac{b-a}{3}$ e

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = \varphi(a') = Q.$$

Caso $\varphi(a') > Q$, suponha que $\varphi(b'), \varphi(a) \geq Q$. Assim

$$\frac{\varphi(b') + \varphi(a') + \varphi(a)}{3} > Q.$$

O que é um absurdo, logo pelo menos um dos dois valores deve ser menor que Q . Vamos

assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi(a) < Q$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $a_1 \in (a, a')$ tal que $\varphi(a_1) = Q$. Sendo assim, definamos $b_1 = a_1 + h$ para obter um intervalo $[a_1, b_1] \subsetneq [a, b]$ tal que $b_1 - a_1 = h = \frac{b-a}{3}$ e

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h} = \varphi(a_1) = Q.$$

Em todo caso, podemos observar que sempre é possível construir um intervalo $[a_1, b_1] \subsetneq [a, b]$ de modo que $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{3}$ e $\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = Q$. Aplicando esta ideia de maneira indutiva, iremos obter uma sequência de intervalos encaixantes $[a_1, b_1] \supsetneq [a_2, b_2] \supsetneq \cdots \supsetneq [a_n, b_n] \supsetneq \cdots$, de forma que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{3^n}$$

e

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = Q.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que cada intervalo da sequência está contido propriamente no anterior e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{3^n} = 0.$$

Podemos garantir que existe $c \in \bigcap [a_n, b_n]$ tal que a_n e b_n tendem ao ponto c quando n tende ao infinito. Observe que

$$\begin{aligned} Q &= \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(b_n) - f(c) + f(c) - f(a_n)}{b_n - a_n} \\ &= \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - a_n} + \frac{f(c) - f(a_n)}{b_n - a_n} \\ &= \frac{b_n - c}{b_n - c} \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - a_n} + \frac{c - a_n}{c - a_n} \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{b_n - a_n} \\ &= \frac{b_n - c}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + \frac{c - a_n}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n}. \end{aligned}$$

Agora, definamos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$p_n = \frac{b_n - c}{b_n - a_n} \quad \text{e} \quad q_n = \frac{c - a_n}{b_n - a_n}.$$

Deste modo

$$p_n + q_n = \frac{b_n - c + c - a_n}{b_n - a_n} = \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} = 1.$$

Além disso, note que $(b_n - a_n), (b_n - c), (c - a_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, as sequências $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas inferiormente por 0 e superiormente por 1, pois dado que $p_n + q_n = 1$ e $p_n, q_n > 0$, devemos ter $p_n, q_n < 1$. Ainda

$$Q = p_n \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + q_n \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, veja que se tomarmos $\xi = b_n - c$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \xi) - f(c)}{\xi} = f'_+(c).$$

E ao tomarmos $\zeta = a_n - c$, podemos observar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} = \lim_{\zeta \rightarrow 0^-} \frac{f(c) - f(c + \zeta)}{(-\zeta)} = \lim_{\zeta \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \zeta) - f(c)}{\zeta} = f'_-(c).$$

Agora, vamos analisar dois casos. O primeiro caso é quando f é derivável em (a, b) , ou seja, suas derivadas laterais são necessariamente iguais. Neste caso, note que

$$f'(c) = f'(c)(p_n + q_n) = p_n f'(c) + q_n f'(c).$$

Assim

$$Q = p_n \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + q_n \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n}$$

$$\Rightarrow Q - f'(c) = p_n \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + q_n \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} - p_n f'(c) - q_n f'(c)$$

$$\Rightarrow Q - f'(c) = p_n \left(\frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} - f'(c) \right) + q_n \left(\frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} - f'(c) \right)$$

$$\Rightarrow Q - f'(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p_n \left(\frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} - f'(c) \right) + q_n \left(\frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} - f'(c) \right) \right].$$

Veja que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \left(\frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} - f'(c) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \left(\frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} - f'(c) \right) = 0.$$

Pois $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas, enquanto as outras sequência convergem para 0, logo

$$Q - f'(c) = 0 \Rightarrow Q = f'(c).$$

Ao tomarmos $p = \frac{1}{2} = q$, temos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q = pf'(c) + qf'(c) = pf'_+(c) + qf'_-(c).$$

Caso f não seja derivável em (a, b) ou seja, suas derivadas laterais são necessariamente diferentes, observe que

$$\begin{aligned} Q - \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} &= p_n \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + q_n \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} - \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} \\ &= p_n \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + (q_n - 1) \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} \\ &= p_n \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} - p_n \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} \\ &= p_n \left(\frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} - \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} \right). \end{aligned}$$

Desta forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{Q - f'_-(c)}{f'_+(c) - f'_-(c)}.$$

Definamos $p = \lim p_n$. Sendo assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1 - p.$$

Façamos $q = 1 - p$. Desta forma, temos $p + q = 1$ e $p, q \geq 0$, pois $p_n, q_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso

$$pf'_+(c) + qf'_-(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p_n \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + q_n \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} \right) = Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Concluindo, assim, a demonstração. □

Observação 2.9. Como podemos observar na própria demonstração do teorema, se f for derivável, então o teorema é reduzido ao Teorema do Valor Médio de Lagrange usual.

O próximo resultado é uma generalização do Teorema de Rolle, em que a hipótese de diferenciabilidade é substituída pela hipótese de diferenciabilidade unilateral.

Teorema 2.10. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável à esquerda e à direita em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existem $c \in (a, b)$ e $p, q \in \mathbb{R}_+$, com $p + q = 1$, tais que:

$$pf'_+(c) + qf'_-(c) = 0.$$

Demonstração. Note que f satisfaz todas as hipóteses do Teorema 4, logo existem $c \in (a, b)$ e $p, q \in \mathbb{R}_+$, com $p + q = 1$, tais que

$$pf'_+(c) + qf'_-(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Pois, por hipótese, $f(b) = f(a)$. □

Observação 2.11. Se a função f for diferenciável, então o teorema anterior se reduz ao Teorema de Rolle usual.

O resultado a seguir é uma generalização do Teorema do Valor Médio de Cauchy, onde a hipótese de diferenciabilidade é substituída pela hipótese de diferenciabilidade unilateral e as hipóteses de $g(a)$ ser diferente de $g(b)$ e $g'(x)$ ser não nula em todo o intervalo (a, b) são retiradas.

Teorema 2.12. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Se f e g são deriváveis à esquerda e à direita em (a, b) , então existem $c \in (a, b)$ e $p, q \in \mathbb{R}_+$, com $p + q = 1$, tais que:

$$[pf'_+(c) + qf'_-(c)] \cdot [g(b) - g(a)] = [pg'_+(c) + qg'_-(c)] \cdot [f(b) - f(a)].$$

Demonstração. Definamos a função $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)] + [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)].$$

Desta forma, φ satisfaz as hipóteses do Teorema 5, logo existem $c \in (a, b)$ e $p, q \in \mathbb{R}_+$,

com $p + q = 1$, tais que:

$$p\varphi'_+(c) + q\varphi'_-(c) = 0$$

$$\Rightarrow [pf'_+(c) + qf'_-(c)] \cdot [g(b) - g(a)] - [pg'_+(c) + qg'_-(c)] \cdot [f(b) - f(a)] = 0$$

$$\Rightarrow [pf'_+(c) + qf'_-(c)] \cdot [g(b) - g(a)] = [pg'_+(c) + qg'_-(c)] \cdot [f(b) - f(a)].$$

□

Observação 2.13. Quando f e g são deriváveis, $g(a)$ é diferente de $g(b)$ e $g'(x)$ é não nula em (a, b) , o teorema se reduz ao Teorema do Valor Médio de Cauchy usual. Caso tenhamos apenas as hipóteses adicionais de que $g(a) \neq g(b)$ e $g'_+(x), g'_-(x)$ são estritamente positivas ou estritamente negativas em (a, b) , a equação obtida pode ser reescrita na forma:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{pf'_+(c) + qf'_-(c)}{pg'_+(c) + qg'_-(c)}.$$

Que se assemelha mais à equação obtida no Teorema do Valor Médio de Cauchy usual.

3. Resultados da Pesquisa (Parciais ou Finais)

Neste trabalho, apresentamos generalizações dos Teoremas de Rolle, do Valor Médio de Lagrange e do Valor Médio de Cauchy, no contexto em que a hipótese clássica de derivabilidade é substituída pela existência de derivadas laterais. Verificamos também que, nos casos em que a função é derivável no sentido usual, os resultados obtidos coincidem com as versões clássicas desses teoremas.

Referências

KARAMATA, J. Sur la formule des accroissements finis. **Srpska Akademija Nauka i Umetnosti – Mat. Inst.**, Belgrado, v. 1, p. 119–124, 1951.

KUBIK, L. Generalizations of the Rolle, Lagrange and Cauchy theorems. **Wiadomosci Matematyczne**, Varsóvia, v. 5, p. 47–51, 1962.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise - Volume 1**. [S.l.]: IMPA, 2007.